Estimation

. Correction de l'exercice n°10

1. Si $x < 0$ on a clairement $\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = 0$. Si $x \geq 0$, alors il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $x < 2n$. Alors
$$F_{X_n}(x) = 1 - \exp\left(-ax - \frac{x^2}{2n}\right) \to 1 - e^{-ax}$$
Ainsi (X_n) converge en loi vers X où X suit une loi exponentielle de paramètre a.
2. (a) Soit $(c, d) \in \mathbb{R}^2$.
$$P(c \leq Z \leq d) = P(Z \geq c) - P(Z \geq d) = e^{-c} - e^{-d}$$
$$\begin{cases} P(c \leq Z \leq d) & = & 1-\alpha \\ P(Z \leq c) & = & \alpha/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-c} - e^{-d} & = & 1-\alpha \\ 1 - e^{-c} & = & \alpha/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-d} & = & e^{-c} - 1 + \alpha \\ e^{-c} & = & 1 - \alpha/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d & = & -\ln(\alpha/2) \\ c & = & -\ln(1-\alpha/2) \end{cases}$$
(b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$P(aZ \leq t) = P(Z \leq t/a) = F_Z(t/a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-t/a} & \text{sinon} \end{cases}$$
Ainsi aZ suit une loi exponentielle de paramètre $1/a$.

(c)
$$P\left(a \in \left[\frac{c}{X_n}; \frac{d}{X_n}\right]\right) = P\left(aX_n \in [c; d]\right)$$
Or en reprenant la question précédente on montre que (aX_n) converge en loi vers Z, donc
$$\lim_{n\to+\infty} P\left(a \in \left[\frac{c}{X_n}; \frac{d}{X_n}\right]\right) = P(c \leq Z \leq d) = 1 - \alpha$$
(d) Cet intervalle est un intervalle de confiance asymptotique du paramètre a au niveau de confiance $1 - \alpha$.

. Correction de l'exercice n°12

1. On sait que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$L_n(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^* \qquad M_n(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$$
Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}^- *$:
$$F_{L_n}(t) = F_{M_n}(t) = 0$$
Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.
$$\begin{aligned} F_{L_n}(t) &= P(L_n \leq t) = 1 - P(L_n > t) \\ &= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i > t]\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > t) \quad \text{par indépendance} \\ &= 1 - (1 - F_{X_1}(t))^n = \boxed{1 - e^{-\lambda n t}} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} F_{M_n}(t) &= P(M_n \leq t) = P(M_n \leq t) \\ &= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leq t]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq t) \quad \text{par indépendance} \\ &= (F_{X_1}(t))^n = \boxed{(1 - e^{-\lambda t})^n} \end{aligned}$$

Les fonctions de répartition sont donc

$$F_{L_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda n t} & \text{sinon} \end{cases} \qquad F_{M_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ (1 - e^{-\lambda t})^n & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Comme $n \geq 1$ et $\lambda > 0$, $Y_n(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$. Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}^- *$:

$$F_{Y_n}(t) = 0$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

$$F_{Y_n}(t) = P(Y_n \leq t) = P(L_n \leq t/(n\lambda) = 1 - e^{-t}$$

On retrouve la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)}$.

3. (a) Comme $n \geq 1$ et $\lambda > 0$, $Z_n(\Omega) \subset \mathbb{R}$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$F_{Z_n}(t) = P(M_n \leq (t + \ln(n))/\lambda)$$

Donc si $t \leq -ln(n)$, $F_{Z_n}(t) = 0$. Si $t > -ln(n)$,

$$F_{Z_n}(t) = P(M_n \leq (t + \ln(n))/\lambda) = (1 - e^{-\lambda \frac{(t+\ln(n)}{\lambda}})^n = \left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right)^n$$

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme n tend vers $+\infty$:

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n, t > -\ln(n)$$

Pour un tel N, et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$F_{Z_n}(t) = \left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right)\right)$$

Or comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^{-t}}{n} =,$

$$\ln\left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right) \sim -\frac{e^{-t}}{n}$$

donc

$$n \ln\left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right) \sim -e^{-t}$$

Ainsi

$$\lim_{n \to +\infty} F_{Z_n}(t) = e^{-e^{-t}}$$

(c) La fonction $F : t \mapsto e^{-e^{-t}}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, c'est donc la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Ainsi

$$\boxed{Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z}$$

où Z admet F comme fonction de répartition.

4. (a) On a vu à la question 2 que $Y_n = n\lambda L_n$ suit une loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi $E\left(\dfrac{Y_n}{\lambda}\right) = \dfrac{1}{\lambda}$. On en déduit que, si on pose $\tilde{L_n} = nL_n$, il s'agit bien d'un estimateur de μ dont le biais vaut

$$b_\lambda(\tilde{L_n}) = E(nL_n - \mu) = \frac{1}{\lambda} - \mu = 0$$

(b) Le risque quadratique est donné par la formule

$$r_\lambda(\tilde{L_n}) = V(\tilde{L_n}) + b_\lambda(\tilde{L_n})^2 = V(\tilde{L_n}) = V(\frac{Y_n}{\lambda}) = \frac{1}{\lambda^2} V(Y_n) = \boxed{\frac{1}{\lambda^2}}$$

(c) Soit $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} P\left(|\tilde{L_n} - \mu| > \varepsilon\right) &= 1 - P\left(|\tilde{L_n} - \mu| \leq \varepsilon\right) = 1 - P(\mu - \varepsilon \leq \tilde{L_n} \leq \mu + \varepsilon) \\ &= 1 - P(\frac{\mu - \varepsilon}{n} \leq L_n \leq \frac{\mu + \varepsilon}{n}) = 1 - F_{L_n}(\frac{\mu + \varepsilon}{n}) + F_{L_n}(\frac{\mu - \varepsilon}{n}) \\ &= 1 - (1 - e^{-\lambda(\mu+\varepsilon)}) + 1 - e^{-\lambda(\mu-\varepsilon)} = \boxed{1 + e^{-1-\lambda\varepsilon} - e^{-1+\lambda\varepsilon}} \end{aligned}$$

(d) La quantité précédente ne dépend pas de n donc elle ne peut pas tendre vers 0 en $+\infty$.

$\boxed{\text{L'estimateur n'est donc pas convergent.}}$

(e)

$$P(Y < -\ln(1-\frac{\alpha}{2}) = 1 - e^{\ln(1-\frac{\alpha}{2})} = 1-(1-\frac{\alpha}{2}) = \frac{\alpha}{2}$$

et

$$P(Y > -\ln(\frac{\alpha}{2}) = 1 - P(Y \leq -\ln(\frac{\alpha}{2}) = 1-(1-e^{\ln(\frac{\alpha}{2})}) = \frac{\alpha}{2}$$

(f)

$$\begin{aligned}
P\left(\mu \in I_{\alpha,n}\right) &= P\left(\frac{\tilde{L_n}}{-\ln(\alpha/2)} \leq \mu \leq \frac{\tilde{L_n}}{-\ln(1-\alpha/2)}\right) \\
&= P(-\mu(\ln(1-\alpha/2)) \leq \tilde{L_n} \leq -\mu(\ln(-\alpha/2)) = P(-\lambda\mu(\ln(1-\alpha/2)) \leq \lambda\tilde{L_n} \leq -\mu\lambda(\ln(-\alpha/2)) \\
&= P(-\ln(1-\alpha/2) \leq Y_n \leq -\ln(-\alpha/2)) \\
&= 1 - P(Y_n > -\ln(-\alpha/2)) - P(Y_n > -\ln(1-\alpha/2)) = 1-\alpha
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi } I_{\alpha,n} \text{ est un intervalle de confiance de } \mu \text{ au niveau } 1-\alpha.}$