TD 25 – Probabilités

1 Probabilités générales

Exercice 1. On lance 2 dés à 6 faces non pipés, et discernables. Calculer la probabilité d'obtenir :
a) un double,
b) une somme des deux dés égale à 8,
c) au moins un six.

Exercice 2. Dans l'espace probabilisé (Ω, P) avec $\Omega = \{a, b, c\}$ on suppose que $P(\{a, b\}) = \frac{2}{3}, P(\{b, c\}) = \frac{1}{2}$. En déduire $P(\{a, c\})$.

Exercice 3. Dix paires de chaussures toutes différentes sont rangées dans un placard. On prend au hasard 4 chaussures. Quelle est la probabilité d'obtenir
a) deux paires de chaussures ?
b) au moins une paire de chaussures ?
c) une et une seule paire de chaussures ?

Exercice 4. Un gardien de phare doit ouvrir une porte avec un trousseau de n clefs, dont une et une seule ouvre la porte. Il essaie les clés au hasard les unes après les autres. Calculer, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$ la probabilité la porte s'ouvre à la $k$ième tentative et pas avant.

Exercice 5. On ramasse dans un ordre aléatoire les copies d'une classe de $n = 41$ étudiants à la fin d'un devoir surveillé.
a) Quelle est la probabilité que les copies soient rangées par ordre alphabétique ?
b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$, quelle est la probabilité que les k premières copies soient rangées par ordre alphabétique ?

Exercice 6. Une urne contient 9 boules : 5 blanches et 4 noires. On tire successivement et sans remise 4 boules. Calculer la probabilité d'obtenir 2 boules blanches puis 2 boules noires.

Exercice 7. Une urne contient une boule rouge et une boule noire. On effectue n tirages avec remise (on remet la boule dans l'urne après l'avoir tirée).
Soient A_n l'événement « on obtient, aucours des n tirages, des boules des deux couleurs »
et B_n l'événement « on obtient, au cours des n tirages, au plus une boule rouge ».
a) Calculer, pour tout $n \geq 2$, $P(A_n)$ et $P(B_n)$.
b) Etudier l'indépendance des événements A_n et B_n dans les cas $n = 2$, $n = 3$, puis le cas général.

Exercice 8. On dispose de 3 urnes U_1, U_2, U_3, chacune contient 2 boules noires et deux boules blanches. On tire une boule dans U_1 et une dans U_2, puis on les place dans U_3. On tire alors une boule dans U_3.
a) Quelle est la probabilité d'avoir tiré 3 boules noires ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche dans U_3 ?
c) On suppose que l'on a obtenu une boule blanche dans U_3. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une boule blanche dans U_1 et une boule blanche dans U_2 ?

Exercice 9. Une information se propage : chaque personne la transmet avec une probabilité $p \in]0, 1[$ de la changer en son contraire, et $q = 1 - p$ de la transmettre fidèlement.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on mote p_n la probabilité que la n-ième personne recoive l'information correcte. On notera que le contraire du contraire est l'information inchangée. On a alors $p_1 = 1$.
a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer p_n en fonction de p et n.
c) Étudier la convergence de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Qu'en conclure sur la rumeur ?

Exercice 10. Déterminer une probabilité sur $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ telle que la probabilité de l'événement $\{k\}$ soit proportionnelle à k.

Exercice 11. A quelle(s) condition(s) sur $x, y \in \mathbb{R}$ existe-t-il une probabilité sur $\Omega = \{a, b, c\}$ vérifiant

$$P(\{a, b\}) = x \text{ et } P(\{b, c\}) = y\,?$$

Exercice 12. Soients A et B deux événements d'un espace probabilisé.
Montrer

$$\max\{0, P(A) + P(B) - 1\} \leq P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\}$$

Exercice 13. Soients A et B deux événements avec $P(A) > 0$. Comparer les probabilités conditionnelles

$$P(A \cap B \mid A \cup B) \text{ et } P(A \cap B \mid A)$$

Exercice 14. On considère N coffres. Avec une probabilité p un trésor à été placé dans l'un de ces coffres, chaque coffre pouvant être choisi de façon équiprobable. On a ouvert $N-1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'il figure dans le dernier coffre ?

Exercice 15. Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé.
On suppose $0 < P(B) < 1$. Etablir
$$P(A) = P(A \mid B)P(B) + P(A \mid \overline{B})P(\overline{B})$$

Exercice 16. Une urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges. On tire de celle-ci une boule, on note sa couleur et on la remet accompagnée de d boules de la même couleur. On répète l'expérience à l'envie.

Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche lors du n-ième tirage.

Exercice 17. Une urne contient 8 boules blanches et deux boules noires.
On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.
Quelle est la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire ?

Exercice 18. On se donne $N+1$ urnes numérotées de 0 à N. L'urne de numéro k contient k boules blanches et $N-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, chaque choix étant équiprobable. Dans l'urne choisie, on tire des boules avec remise.
a) Quelle est la probabilité que $(n+1)$-ième boule tirées soit blanche sachant que les n précédentes l'étaient toutes ?
b) Que de vient cette probabilité lorsque $N \to +\infty$?

Exercice 19. Dans une population, une personne sur 10 000 souffre d'une pathologie. Un laboratoire pharmaceutique met sur le marché un test sanguin. Celui-ci est positif chez 99 % des malades mais aussi faussement positif chez 0,1 % des personnes non atteintes. Un individu passe ce test et obtient un résultat positif.
Quelle est sa probabilité d'être malade ? Qu'en conclure ?

Exercice 20. Deux joueurs ont chacun une pièce, la pièce 1 donne pile avec une probabilité p_1 et la pièce 2 avec une probabilité p_2, avec $p_1, p_2 \in]0, 1[$.
Quand un joueur tire pile avec sa pièce, il recommence, s'il tire face, c'est à l'autre joueur de jouer. Le premier qui a tiré 2 faces a gagné.
On tire au hasard (probabilité $\frac{1}{2}$ chacun) le premier joueur qui commence.
a) Quelle est la probabilité que le joueur 1 gagne ?
b) Même question si c'est le joueur 1 qui commence, et celui qui gagne est celui qui a tiré 2 piles.

Exercice 21. Une personne écrit à n correspondants des lettres personnelles, met chaque lettre dans une enveloppe, ferme les enveloppes, puis écrit les adresses au hasard.
a) Quelle est la probabilité p_n qu'une au moins des lettres arrive à son destinataire ?
b) Étudier la suite p_n.

Exercice 22. A et B jouent alternativement aux dés avec 2 dés. A gagne si la somme des dés est 7, B gagne si la somme fait 6. B joue le premier. Quelles sont les probabilité de gagner de A et B ?

Exercice 23. Dans le plan un point (x, y) se déplace en $(x, y+1)$ avec la probabilité p et en $(x+1, y)$ avec la probabilité $q = 1-p$. Il part de $(0, 0)$.
Soient $a, b \in \mathbb{N}$, quelle est la probabilité qu'il atteigne le point (a, b) ?

2 Variables aléatoires sur un univers fini

Exercice 24. On jette deux dés. Soit X la variable aléatoire égale produit des deux dés, et Y égale au maximum des deux dés.
a) Calculer les lois de X et de Y.
b) Déterminer l'espérance de Y.
c) Généraliser les questions précédentes pour Y au cas de n dés.

Exercice 25. Une urne contient 10 boules : 7 blanches et 3 noires. On tire les boules l'une après l'autre sans remise, et on note X la variable aléatoire égale au rang de la première boule blanche tirée.
a) Déterminer la loi de X.
b) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 26. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules : 1 blanche et $n-1$ noires. On tire les boules l'une après l'autre sans remise, et on note X la variable aléatoire égale au rang de la première boule blanche tirée.
a) Déterminer la loi de X.
b) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 27. On lance simultanément deux dés à 6 faces équilibrés. Soit Z la variable aléatoire égale à la valeur absolue de la différence des valeurs des faces des deux dés.
a) Déterminer la loi de Z.
b) Calculer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 28. Sur un marché, une proportion p de la population est contaminée par un virus contagieux (mais bénin). Si une personne saine entre en contact avec une personne contaminée, elle a 2 chances sur 3 d'être contaminée à son tour. Un candidat aux élections en parfaite santé décide de serrer la main à n personnes sur ce marché.
a) Soit N la variable aléatoire égale au nombre de personnes malades rencontrées par ce candidat. Quelle est la loi de N ?
b) Quelle est la probabilité que le candidat soit contaminé à la fin de sa tournée du marché ?

Exercice 29. On se propose d'analyser le sang d'une population de N personnes pour détecter, quand le résultat du test utilisé est positif, la présence d'un virus dont on sait qu'il affecte une personne donnée avec la probabilité p. On dispose de 2 méthodes :

Méthode 1 : on analyse le sang de chacune des N personnes.

Méthode 2 : on divise la population en g groupes de n personnes. On collecte le sang des n personnes d'un même groupe dans une même (grosse) éprouvette.
Si le résultat du test est positif, on utilise alors la méthode 1 pour ce groupe : on analyse le sang de chaque personne du groupe. Sinon, on ne fait rien : personne n'est contaminé.
a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de groupes positifs ?
b) Soit Y la variable aléatoire Y égale au nombre d'analyses dans la méthode 2. Calculer l'espérance de Y en fonction de N, n, p.
c) Comparer les deux méthodes quand $N = 1000$, $n = 100$, $p = 0,01$.

Exercice 30. Une puce réelle saute aléatoirement sur la droite réelle. A chaque instant, elle fait un bond de longueur 1 vers la droite ($+\infty$) avec une probabilité $p \in [0, 1]$, ou vers la gauche ($-\infty$), avec une probabilité $1 - p$.
Au temps $n = 0$, la puce est à l'origine. Soit X_n la position de la puce à l'instant n.
a) Déterminer la loi de X_n, son espérance, et sa variance.
b) Que se passe-t-il quand n tend vers l'infini ?
c) Quelle probabilité la puce-a-t-elle de rester dans les positions positives ou nulles ?

3 Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 31. Le nombre de pièces sortant d'une usine en une journée est une variable aléatoire d'espérance 50. On veut estimer la probabilité que la production de demain dépasse 75 pièces.

1. En utilisant l'inégalité de Markov, quelle estimation obtient-on sur cette probabilité ?
2. Que peut-on dire de plus sur cette probabilité si on sait que l'écart-type de la production quotidienne est 5 ?

Exercice 32. Pour étudier les particules émises par une substance radioactive, on dispose d'un détecteur. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de particules qui atteignent le détecteur pendant un intervalle de temps Δt. Le nombre maximal de particules que le détecteur peut compter pendant un intervalle de temps Δt est de 10^3. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 10^2$. Donner une majoration de la probabilité que X dépasse 10^3.
Caractéristiques d'une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$: son espérance et sa variance sont égales à λ.

4 Graphe aléatoire

Exercice 33. Une puce se déplace aléatoirement sur l'ensemble des sommets A, B, C d'un triangle de la façon suivante. Si à l'instant n, elle est sur l'un quelconque des sommets alors à l'instant $n + 1$ elle y reste avec la probabilité $\frac{2}{3}$ ou bien elle va vers l'un des deux autres sommets de façon équiprobable.
À l'instant 0, la puce se se trouve en A. Soient a_n (resp : b_n, c_n) la probabilité que la puce soit en A (resp : B et C) à l'instant n.

Introduction

1. Déterminer a_0, b_0, c_0 puis a_1, b_1, c_1. On justifiera soigneusement les calculs effectués.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner la valeur de $a_n + b_n + c_n$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer a_{n+1} , b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

Le but de la suite est d'étudier de deux façons différentes le problème.

Première étude

4. Montrer que les suites $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont géométriques dont on précisera la raison et le premier terme. En déduire $a_n - b_n$ et $a_n - c_n$ en fonction de n.
5. En déduire a_n en fonction de n.
6. Donner b_n et c_n en fonction de n.
7. Étudier les limites des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Seconde étude

On considère la suite de vecteurs colonnes $(X_n)_{n\geq 0}$ avec $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}^T$.

8. Déterminer la matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.
9. Déterminer une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP = \operatorname{diag}\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.
10. En déduire X_n en fonction de n.

Exercice 34. Les urnes de Pólya

On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

- si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;
- si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.

Le premier objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du n-ième tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du n-ième tirage dans un cas particulier. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n-ième tirage est blanche, 0 si la boule tirée au n-ième tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

On rappelle que si E et F sont deux événements avec $P(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $P(E|F)$ ou $P_F(E)$) par :

$$P(E|F) = P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

Partie I - Préliminaires

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant l'événement $(X_1 = 1)$. En déduire la loi de X_2.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?

Partie II - La loi de X_n

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Pour tout $k \in [\![b, n+b]\!]$, calculer $P(X_{n+1} = 1 | S_n = k)$.
5. A l'aide de la formule des probabilités totales, justifier que : $P(X_{n+1} = 1) = \dfrac{E(S_n)}{b+r+n}$.
6. Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie III - La loi de S_n dans un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Exprimer l'événement $(S_n = 1)$ avec les événements $(X_k = 0)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.
8. Montrer que $P(S_n = 1) = \frac{1}{n+1}$.

On admet dans la suite que l'on a de même $P(S_n = n + 1) = \frac{1}{n+1}$.

9. Soit $(k, \ell) \in [\![1, n + 2]\!] \times [\![1, n + 1]\!]$. Calculer la probabilité $P(S_{n+1} = k | S_n = \ell)$ dans chacun des trois cas suivants :

$$(i)\ \ell \notin \{k - 1, k\}, \qquad (ii)\ \ell = k - 1, \qquad (iii)\ \ell = k.$$

10. Montrer que pour tout $k \in [\![2, n + 1]\!]$, on a la relation :

$$P(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k - 1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k).$$

11. Montrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n + 1]\!]$.