

EXERCICE 1 — Calculs de limites

Déterminer les limites ci-dessous :

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 + x + 1}$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x-3}{e^{-x}-1}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x-3}{e^{-x}-1}$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{1}{(x-2)^2}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{1}{(x-2)^2}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) + x}{e^{-x}}$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{x}{x-3}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{x}{x-3}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{x^3}$ | <ol style="list-style-type: none"> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 1}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x}+1}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 + x}{x^2 - 3x + 1}$ $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > 2}} (\ln(3x^2 + 1) - \ln(x+2))$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^{-x} + 1}$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{-1/x^2}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} e^{-1/x^2}$ |
|---|--|

EXERCICE 2 — Calculs de limites

Déterminer les limites ci-dessous :

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(3x^2 + 1) - \ln(x+2))$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 + x + 1} - \sqrt{3x^2 + 7}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(3x^2 + 1) - \ln(e^x + 2))$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2 + 2x + 1} - \sqrt{2x^2 + 5}$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} e^{1/x}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} e^{1/x}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\frac{1}{x})}{x}$ | <ol style="list-style-type: none"> $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{1/x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{1/x}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x) - \ln(x+2))$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 1) - x$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - e^x}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - e^x}{x}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x-2}{x^2 - 5x + 6}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x-2}{x^2 - 5x + 6}$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \left[\frac{1}{x} \right]$ |
|--|---|

EXERCICE 3 — Equivalent et négligeabilité

Trouver un équivalent avec la propriété $f(x) + o(f(x)) \sim f(x)$.

- $f(x) = \ln(1+x)$ en $+\infty$.
- $g(x) = x^3 + x\sqrt{x} + 2$ en $+\infty$.
- $h(x) = 2x^3 - x^2\sqrt{x} + 2e^x - \ln(x)$ en $+\infty$.

EXERCICE 4 — Négligeabilité

Comparer les quantités $f(x)$ et $g(x)$ suivantes, au voisinage indiqué

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> En $+\infty$: $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \ln(x)$. En $+\infty$: $f(x) = x^3$ et $g(x) = e^x$. En $+\infty$: $f(x) = (\ln(x))^3$ et $g(x) = x^{1/4}$. En 0 : $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x^{-3/2}$. En $+\infty$: $f(x) = x^4 - x^2 + 2$ et $g(x) = e^{x+1}$. | <ol style="list-style-type: none"> En $+\infty$: $f(x) = x^{3/2}$ et $g(x) = e^{x^2}$. En $+\infty$: $f(x) = x$ et $g(x) = \ln(x^2 + x)$. En $+\infty$: $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{(\ln(t))^2} dt$ et $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$. |
|--|--|

EXERCICE 5 — Equivalents usuels

Trouver un équivalent le plus simple possible à l'aide d'opérations usuelles et des équivalents usuels.

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> $a(x) = x^3 + 4x^2 - 1$ en ∞ et en 0. $b(x) = \frac{5x^2 - x + 3}{2x^4 - x + 1}$ en ∞ et en 0. $c(x) = e^{\sqrt{x}} - 1$ en 0. $d(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ en 0. $e(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} - 1$ en $+\infty$. $f(x) = \ln(1+2x)(e^{\sqrt{x}} - 1)$ en 0. $g(x) = \frac{e^{-x^2} - 1}{x^2 + x}$ en 0. $h(x) = \frac{\ln(1+2x^2)}{\sqrt{1+3x^2}-1}$ en 0. | <ol style="list-style-type: none"> $i(x) = \ln(1 + \frac{1}{x^2})$ en $+\infty$. $\frac{1}{1+x^2+\sqrt{x}}$ en $+\infty$ $\frac{1}{1+x^2+\sqrt{x}}$ en 0^+ $x + \sqrt{x} + \ln x$ en $+\infty$ $x + \sqrt{x} + \ln x$ en 0^+ $\frac{x + \sqrt{x}}{x^2 + 1 + \ln x}$ en $+\infty$ $\frac{x + \sqrt{x}}{x^2 + 1 + \ln x}$ en 0^+ |
|---|---|

EXERCICE 6 — Equivalent et encadrement

- On admet que, pour tout réel $x \geq 4$, $\frac{x \ln(x)}{\sqrt{x}+1} \leq f(x) \leq \sqrt{x+2} \ln(x+1)$. Déterminer un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.
- Donner un équivalent en $+\infty$ de la partie entière de x .

EXERCICE 7 — Prolongement par continuité

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{\ln(1 + x^2)}$. Est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$?
2. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \frac{\ln(x)^2}{x - 1}$ est vérifier qu'elle est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_*^+$.
3. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ et vérifier qu'elle est prolongeable par continuité sur $[-1; +\infty[$.
4. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x}$. Est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^+$?

EXERCICE 8 — Equivalents - DL - limites

En calculant un équivalent puis les limites suivantes

- | | |
|--|--|
| 1. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ en $+\infty$ | 5. $\frac{e^x - 1 - \ln(1+x)}{x^2}$ en 0 |
| 2. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ en $+\infty$ | 6. $\ln(2e^x - 1)$ en 0 |
| 3. $x \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right)$ en $+\infty$ | 7. $\ln(1 + x^2)$ en $+\infty$. |
| 4. $\frac{x - \ln x}{x - \sqrt{x}}$ en $+\infty$ et en 0^+ | 8. $\ln(1 + e^x)$ en $+\infty$ |

EXERCICE 9 — DL usuels

Trouver un DL en 0 à l'ordre 2 à l'aide des DL usuels et des opérations usuelles sur les DL (**Sans utiliser** la formule de Taylor Young).

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1. $x \mapsto \ln(1 + 2x) - x$ | 6. $x \mapsto \frac{\ln(1 + x^2)}{(1 + x)^2}$ |
| 2. $x \mapsto \frac{\ln(1 + x)}{e^x}$ | 7. $x \mapsto \exp(\sqrt{1 + x})$ |
| 3. $x \mapsto e^x \ln(1 - x)$ | 8. $x \mapsto \sqrt{1 + \ln(1 + x)}$ |
| 4. $x \mapsto \ln(2 + x)$ | 9. $x \mapsto e^x - \frac{1}{1 + x}$ |
| 5. $x \mapsto \sqrt{3 + x}$ | |

EXERCICE 10 — DL usuels - Plus durs

Trouver un DL en 0 à l'ordre 2 à l'aide des DL usuels et des opérations usuelles sur les DL (**Sans utiliser** la formule de Taylor Young). **Sans utiliser** la formule de Taylor Young calculez les développements limités suivants, en 0 à l'ordre 2

- | | |
|---|--|
| 1. $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}}{1+e^x}$ | 4. $x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{1+xe^x}}$ |
| 2. $x \mapsto \ln(1 + e^x)$ | 5. $x \mapsto (1 + e^x)^\alpha$ où α est une constante. |
| 3. $\frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{1+\ln(1+x)}$ | 6. $x \mapsto \ln(1 + e^{\sqrt{1+x}}) - \exp(x) \ln(1+x)$ |

EXERCICE 11 — DL et Taylor-Young

Avec la formule de Taylor Young calculer les développements limités suivants, en 0 à l'ordre 2.

- | | |
|---------------------------|--------------------------|
| 1. $x \mapsto e^{-2x}$ | 4. $x \mapsto (1+x)^x$ |
| 2. $x \mapsto \sqrt{3+x}$ | 5. $x \mapsto e^{x^2-1}$ |
| 3. $x \mapsto x \ln(2+x)$ | |

EXERCICE 12 — Perte d'ordre

Essayez de calculer les DL des fonctions suivantes, à l'ordre 2 En 0. Que se passe t'il ?

- | | |
|--|--------------------------------------|
| 1. $x \mapsto \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}$ | 3. $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{xe^x}$ |
| 2. $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x} - e^x}$ | |

EXERCICE 13 — DL autre part qu'en 0

Calculer le développement limité des fonctions suivantes à l'ordre 2 au point indiqué

- | | |
|--------------------------------|------------------------------------|
| — $x \mapsto \frac{1}{x}$ en 1 | — $x \mapsto \ln x$ en 2 |
| — $x \mapsto e^x$ en 1 | — ** $x \mapsto \sqrt{1+e^x}$ en 2 |
| — $x \mapsto \sqrt{1+x}$ en 1 | — $e^{1-x} + 2 \ln(x)$ en 1 |

Pour aller plus loin



EXERCICE 14

Soit $f : x \mapsto \ln(e^x - e^{-x}) - x$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition puis calculer sa dérivée.
3. Dresser le tableau de variations de f , limites comprises.
4. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?



EXERCICE 15

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x \ln(x^2) - 2x, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est impaire.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$.
4. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
5. Dresser le tableau de variations de f , limites comprises puis tracer une allure de sa courbe représentative.



EXERCICE 16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$.
4. Montrer que pour tout réel x , on a : $e^{-x} \geq 1 - x$.
5. Dresser le tableau de variations de f , limites comprises puis tracer une allure de sa courbe représentative.



EXERCICE 17

Soit f la fonction définie sur $[-1; +\infty[\setminus \{0\}$ par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

1. Déterminer le développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 puis en déduire le développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de 0.
2. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.



EXERCICE 18

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{2x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est continue en 0
3. **Sans utiliser la formule de Taylor-Young** calculer un développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de 0.
4. Montrer que f est dérivable en 0 et calculer sa dérivée.



EXERCICE 19

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que f est continue en 0
3. Avec un développement limité, trouver un équivalent en 0 de $f(x) - f(0)$.
4. En déduire la limite en 0 de $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$
5. f est-elle dérivable en 0 ?

**EXERCICE 20**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)x}{\ln x} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

En utilisant les méthodes vues dans les deux exercices précédents, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

**EXERCICE 21**

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{1-x}$$

1. Calculez un développement limité à l'ordre 2 en 0.
2. En déduire une équation de la tangente à la courbe en 0 sous la forme $ax + b$.
3. En utilisant la question 1 calculer un DL de $f(x) - (ax + b)$ en 0. La courbe est elle en dessous ou au dessus de la tangente ?

**EXERCICE 22**

On s'intéresse à la fonction définie par

$$f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right)$$

1. En utilisant le DL de $\ln(1+u)$ au voisinage de 0 trouver des constantes a , b et c telles qu'au voisinage de $+\infty$

$$f(x) = a + bx + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

2. Trouver une asymptote à la courbe en $+\infty$.
3. Sans nouveau calcul peut on savoir si la courbe est au dessus ou en dessous de l'asymptote ?

**EXERCICE 23**

Refaire l'exercice en posant cette fois $f(x) = x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

**EXERCICE 24**

Refaire l'exercice en posant cette fois $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1-x}$

**EXERCICE 25**

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de 0.

1. On suppose qu'au voisinage de 0 on a $f \sim g$. Montrer alors que $|f| \sim |g|$.
2. On suppose qu'au voisinage de 0 on a $f = o(g)$, montrer que l'on a alors $|f| = o(|g|)$, $|f| = o(g)$ et $f = o(|g|)$.
3. On suppose que f et g sont deux fonctions positives au voisinage de a et que $f \sim g$. Montrer que l'on a alors $\sqrt{f} \sim \sqrt{g}$.

**EXERCICE 26**

1. Montrer que l'on a $x^2 \underset{+\infty}{\sim} x^2 + 1$. A-t'on $\exp x^2 \underset{+\infty}{\sim} \exp(x^2 + 1)$?
2. Montrer qu'au voisinage de 0, $1 + x \sim 1 + x^2$ que se passe t il lorsque l'on compose avec $\ln$?

**EXERCICE 27**

On considère la fonction $\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ζ .
2. Montrer que pour tout $s \in]1; +\infty[$, $\zeta(s) \geq 1$.
3. Étudier les variations de la fonction ζ sur $]1; +\infty[$.
4. (a) Démontrer : $\forall s \in]1; +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(n+1)^s} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leq \frac{1}{n^s}$.
 (b) Établir alors : $\forall s \in]1; +\infty[$, $\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}$.
 (c) En déduire : $\zeta(s) \underset{s \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{s-1}$.
5. Déduire des questions précédentes la valeur de $\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s)$.