Épreuve n°1

E C G

CONCOURS BLANC N°1

Option Économique

MATHÉMATIQUES

3 Septembre 2025

. Exercice n°1

1. Un calcul donne $\boxed{A^2 - 4A = -4I}$. Ainsi, le polynôme $P(X) = X^2 - 4X + 4$ est un polynôme annulateur de A. On trouve alors que $A\left(\dfrac{4I - A}{4}\right) = I$. Ainsi $\boxed{A \text{ est inversible, d'inverse } A^{-1} = \left(\dfrac{4I - A}{4}\right)}$.

2. (a) Les seules valeurs propres possibles sont les racines de P.
Or $P(X) = (X-2)^2$: $\boxed{\text{2 est donc la seule racine de } P \text{ et la seule valeur propre possible de } A.}$
Vérifions que 2 est bien valeur propre de A. Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
$$AX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b + c = 2a \\ 2a + 2c = 2b \\ a - b + 3c = 2c \end{cases} \Leftrightarrow a - b + c = 0 \Leftrightarrow b = a + c \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a \\ a+c \\ c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Ainsi, le système $AX = 2X$ admet des solutions non nulles donc $\boxed{\text{2 est valeur propre de } A}$ et
$$\boxed{E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$
(b) A admet 2 comme seule valeur propre ; or A est une matrice d'ordre 3 et $\dim(E_2)$ =2 car $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille composée de deux vecteurs non colinéaires donc libre et c'est une base de E_2 ; Ainsi, $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

3. D'après l'étude de la question 2b), une base du sous-espace propre de f est $\{(1,1,0); (0,1,1)\}$. On peut donc poser $u_1 = (1,1,0)$ et $u_2 = (0,1,1)$ pour la suite de l'exercice.

4. (a) $u_3 = (1,1,1)$. La famille (u_1, u_2, u_3) est une famille composée de 3 éléments de $\mathbb{R}^3$ un espace de dimension 3, donc il suffit de démontrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre pour que ce soit une base de $\mathbb{R}^3$.
Soient alors trois réels a, b et c tels que $au_1 + bu_3 + cu_4 = 0$. Cette relation implique :
$$a(1,1,0) + b(0,1,1) + c(1,1,1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = 0$$
$\boxed{\text{Ainsi, la famille } (u_1, u_2, u_3) \text{ est libre et c'est une base de } \mathbb{R}^3.}$

(b) $f(u_1) = 2u_1, \quad f(u_2) = 2u_2$ et $f(u_3) = (3,4,3) = u_1 + u_2 + 2u_3$.

Ainsi, la matrice représentative de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est :$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{qui est bien une matrice triangulaire supérieure dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 2.}}$

(c) $T = 2I + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $T = 2I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarquons alors que $N^2 = 0$. De plus, les matrices I et N commutent. Ainsi, d'après la formule du binôme de Newton, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{T^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (2I)^{n-k} = 2^n I + n2^{n-1}N = 2^n I + n2^{n-1}(T - 2I) = n2^{n-1}T - (n-1)2^n I}.$$

5. (a) Notons P la matrice de passage de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (u_1, u_2, u_3). D'après la formule du changement de base, $\boxed{T = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PTP^{-1}}$.

(b) On a alors :

$$\begin{aligned} T^n = n2^{n-1}T - (n-1)2^n I \quad &\Leftrightarrow \quad PT^nP^{-1} = P(n2^{n-1}T - (n-1)2^n I)P^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad A^n = n2^{n-1}PTP^{-1} - (n-1)2^n PP^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^n I \end{aligned}$$

(c) Or si on pose $n = -1$ dans la formule de la question 5a), on a :

$\boxed{A^{-1} = -2^{-2}A + I = -\frac{1}{4}(A - 4I) \text{ et la formule du a) reste valable pour } n = -1.}$

. Exercice n°2

---

1. Les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par somme et produit, $\boxed{f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}}$.

$$\lim_{x \to 0} x \ln(x) = 0 \qquad \text{par croissances comparées}$$

Donc

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -1 = f(0)$$

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est continue à droite en 0 et est donc continue sur } \mathbb{R}^+}$.

2. On calcule son taux d'accroissement en 0 : Soit $x > 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x - \ln(x)$$

Or

$$\lim_{x \to 0} x - \ln(x) = +\infty$$

$\boxed{\text{donc } f \text{ n'est pas dérivable en 0, et la courbe représentatrice de } f \text{ a une tangente verticale en 0.}}$

3. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = 2x - \ln(x) - 1 \qquad \text{et} \qquad f''(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x - 1}{x}$$

qui est du signe de $2x - 1$ (affine).

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } f'' < 0 \text{ sur } \left]0, \frac{1}{2}\right[\text{ et } f \text{ y est concave et } f'' > 0 \text{ sur } \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\text{ et } f \text{ y est convexe.}}$

En $+\infty$: $f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1 = x^2\left(1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$.

Or

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ par croissances comparées}$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

En $\frac{1}{2}$: $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \ln(2) > 0$ car $2 > 1$

x	0		$1/2$		$+\infty$
$f''(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	

Ainsi

x	0		$+\infty$
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

4. Comme f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est, d'après le théorème de la bijection, bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\boxed{J = \left]\lim_0 f, \lim_{+\infty} f\right[=]-1, +\infty[}$.

5. $\boxed{\text{Par symétrie, } f^{-1} \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty.}$

   (On a également $\lim_{x\to-1} f^{-1}(x) = 0$)

6. (a) φ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\varphi'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-2+x}{x^2}$

   En 0 : $\varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln(x) = \frac{2}{x}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\ln(x)}{1/x}\right) \to +\infty$ car $\ln(x) \ll \frac{1}{x}$

   En $+\infty$: $\varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln(x) \to +\infty$

   En 2 : $\varphi(2) = 1 + \ln(2) \simeq 1,69$

   Etude des variations de φ sur $\mathbb{R}^{+*}$:

x	0		2		$+\infty$
$-2+x$		$-$	0	$+$	
$\varphi'(x)$	||	$-$	0	$+$	
φ	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

(b) Comme φ est strictement décroissante sur $\left[\frac{3}{2},2\right]$ alors : si $\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 2$ alors $2\geqslant\varphi\left(\frac{3}{2}\right)\geqslant\varphi(x)\geqslant\varphi(2)\geqslant\frac{3}{2}$ et donc $\varphi(x)\in\left[\frac{3}{2},2\right]$

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } \varphi\left(\left[\frac{3}{2},2\right]\right)\subset\left[\frac{3}{2},2\right]}$

(c) φ' est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\varphi''(x)=\frac{4}{x^3}-\frac{1}{x^2}=\frac{4-x}{x^3}\geqslant 0$ sur $\left[\frac{3}{2},2\right]$

Donc φ' est croissante sur l'intervalle et si $\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 2$ alors $\varphi'\left(\frac{3}{2}\right)\leqslant\varphi'(x)\leqslant\varphi'(2)$ soit $-\frac{2}{9}\leqslant\varphi'(x)\leqslant 0\leqslant\frac{9}{2}$ et donc

$$\boxed{\forall x\in\left[\frac{3}{2},2\right]\quad\left|\varphi'(x)\right|\leqslant\frac{2}{9}}$$

7. 0 n'est solution ni pour l'une ni pour l'autre et
Pour tout $x>0$:

$$\begin{aligned}
x=\varphi(x) &\iff \frac{2}{x}+\ln(x)=x\\
&\iff 2+x\ln(x)=x^2 \text{ (car } x\neq 0)\\
&\iff x^2-x\ln(x)-1=1\\
&\iff f(x)=1
\end{aligned}$$

Or $f(x)=1$ a pour unique solution x_1 donc $x=\varphi(x)$ également.
Conclusion : $\boxed{\varphi(x_1)=x_1}$

8. (a) Pa récurrence :

- Pour $n=0$: $u_0=\frac{3}{2}$ donc $\frac{3}{2}\leqslant u_0\leqslant 2$
- Soit $n\geqslant 0$ tel que $\frac{3}{2}\leqslant u_n\leqslant 2$ alors $u_n\in\left[\frac{3}{2},2\right]$ donc $\varphi(u_n)\in\left[\frac{3}{2},2\right]$ et $\frac{3}{2}\leqslant u_{n+1}\leqslant 2$
- Donc pour tout entier n, $\frac{3}{2}\leqslant u_n\leqslant 2$

(b) On vérifie les hypothèses de l'inégalité des accroissments finis :

- on a vu que $1,5<x_1<2$ donc $x_1\in\left[\frac{3}{2},2\right]$ et u_n également
- $\left|\varphi'\right|\leqslant\frac{2}{9}$ sur $\left[\frac{3}{2},2\right]$
- donc $\left|\varphi(u_n)-\varphi(x_1)\right|\leqslant\frac{2}{9}\left|u_n-x_1\right|$ et comme $\varphi(x_1)=x_1$ on a bien alors

$$\left|u_{n+1}-x_1\right|\leqslant\frac{2}{9}\left|u_n-x_1\right|$$

(c) Et par récurrence :

- Comme $u_0=\frac{3}{2}\leqslant x_1\leqslant 2$ alors $0\leqslant x_1-u_1\leqslant\frac{1}{2}$ donc $\left|u_0-x_1\right|\leqslant\frac{1}{2}\leqslant\left(\frac{2}{9}\right)^0$
- Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\left|u_n-x_1\right|\leqslant\left(\frac{2}{9}\right)^n$ alors $\left|u_{n+1}-x_1\right|\leqslant\frac{2}{9}\left|u_n-x_1\right|\leqslant\frac{2}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^n=\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}$ car $\frac{2}{9}\geqslant 0$
- Donc pour tout entier n : $\left|u_n-x_1\right|\leqslant\left(\frac{2}{9}\right)^n$

(d) Comme $\left|\dfrac{2}{9}\right| < 1$ alors $\left(\dfrac{2}{9}\right)^n \to 0$ et par encadrement $|u_n - x_1| \to 0$

Conclusion : $\boxed{u_n \to x_1 \text{ quand } n \to +\infty}$

(e)
```
u=3/2
n=0
while (2/9)**n>10**(-3):
        n=n+1
        u=2/u+np.log(u)
print(u)
```

. Exercice n°3

---

1. (a) $(X = 1)$ est réalisé lorsqu'on obtient "pile" dès le premier lancer , avec la pièce 0, ou la 1, ou la 2. La formule des probabilités totales ,écrite avec le système complet d'événements (A_0, A_1, A_2) donne donc :
$P(X = 1) = P(P_1) = P_{A_0}(P_1).P(A_0) + P_{A_1}(P_1).P(A_1) + P_{A_2}(P_1).P(A_2)$

Et comme $P_{A_0}(P_1) = \dfrac{1}{2}$, $P_{A_1}(P_1) = 0$, $P_{A_2}(P_1) = 1$ et $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \dfrac{1}{3}$, on obtient :

$$\boxed{P(X = 1) = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} + 0.\frac{1}{3} + 1.\frac{1}{3} = \frac{1}{3}.\frac{3}{2} = \frac{1}{2}.}$$

(b) La même formule des probabilités totales donne :

$$\boxed{P(X = n) = P_{A_0}(X = n).P(A_0) + P_{A_1}(X = n).P(A_1) + P_{A_2}(X = n).P(A_2)}$$

Pour $n \geqslant 2$:

- $P_{A_0}(X = n) = P_{A_0}(F_1 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap P_n) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, car c'est la probabilité d'avoir $n - 1$ "face" puis un "pile" avec la pièce 0, les lancers étant indépendants une fois la pièce choisie.
- $P_{A_1}(X = n) = 0$ car la pièce 1 ne donne jamais "pile" .
- $P_{A_2}(X = n) = 0$ car la pièce 2 donne "pile" dès le premier coup.

On a alors pour $n \geqslant 2$:

$$\boxed{P(X = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.\frac{1}{3} + 0.\frac{1}{3} + 0.\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

(c) Calculons d'abord :

$$P(X \neq 0) = P(X = 1) + \sum_{n=2}^{+\infty} P(X = n) = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

On a ici une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, convergente mais qui commence à $n = 2$.

Donc $P(X \neq 0) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}.\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 - \frac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}.\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}.\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{3}.$

Par conséquent :

$$\boxed{P(X = 0) = 1 - P(X \neq 0) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}}$$

2. X admet une espérance $E(X)$ si, et seulement si , la série $\sum n.P(X=n)$ est (absolument) convergente. Or pour tout $N \in \mathbb{N}$ suffisamment grand,

$$\sum_{n=0}^{N} n.P(X=n) = 0 + 1.P(X=1) + \sum_{n=2}^{N} n.P(X=n) = 0 + 1.\frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{N} n.\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

C'est donc une série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{2}$, donc convergente.
Par suite $E(X)$ existe et vaut :

$$E(X) = 0 + 1.\frac{1}{2} + \frac{1}{6}.\sum_{n=2}^{\infty} n.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1\right).$$

$$E(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{(1-1/2)^2} - 1\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(4-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Soit $\boxed{E(X) = 1}$

3. D'après le théorème de transfert, $X(X-1)$ possède une espérance ssi , la série qui définit $E(X(X-1)) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)P(X=n)$ est (absolument) convergente.

Or pour tout $N \in \mathbb{N}$ suffisamment grand,

$$\sum_{n=0}^{N} n(n-1).P(X=n) = \sum_{n=2}^{N} n(n-1)P(X=n) = \frac{1}{12}\sum_{n=2}^{N} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

On a affaire à une série géométrique dérivée d'ordre 2 de raison $\frac{1}{2}$, donc convergente et

$$E(X(X-1)) = \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{2}{(1-1/2)^3} = \frac{4}{3}.$$

On a donc $\frac{4}{3} = E(X(X-1)) = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X)$ et $E(X^2) - = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$. Et puisque $E(X)^2 = 1$, on a aussi $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}$.

Soit $\boxed{V(X) = \frac{4}{3}}$

4. Par symétrie de "pile" et "face" dans la pièce 0 et par symétrie des deux pièces 1 et 2 , on pourrait déterminer la loi de Y pour montrer que c'est la même que celle de X.

5. (a) Pour tout entier j supérieur ou égal à 2 :
   Si $[Y=j]$ est réalisé , "face" n'arrive qu'au j-ième ($j \geqslant 2$) lancer ,alors on a eu "pile" au premier lancer et donc $[X=1]$ est réalisé .
   Donc $[Y=j] \subset [X=1]$ et $[X=1] \cap [Y=j] = [Y=j]$.

   Par suite : $\boxed{P([X=1] \cap [Y=j]) = P([Y=j]).}$

   (b) Si $i \geqslant 2$, on a de la même façon $[X=i] \cap [Y=1] = [X=i]$ (car si "pile" arrive au i-ième coup , le premier lancer est "face"), et donc $\boxed{P([X=i] \cap [Y=1]) = P([X=i]).}$

6. Loi de $X+Y$.

   (a) X et Y étant des variables aléatoires entières positives ,$\underline{X+Y \text{ est aussi à valeurs entières positives}}$

   - $\underline{\text{la valeur 0 est impossible pour } X+Y}$, car on a $X+Y=0$ ssi $(X=0$ et $Y=0)$, c'est impossible car cela signifie qu'on n'a que des "face" et que des "pile".

- de même, $\underline{2 \text{ est une valeur impossible pour } X+Y}$ car
$[X+Y=2] = ([X=0]\cap[Y=2]) \cup ([X=1]\cap[Y=1]) \cup ([X=2]\cap[Y=0])$.

Or , on ne peut avoir ni $([X=0]\cap[Y=2])$ (que des "face" et le premier "face" au 2-ième coup), ni $([X=1]\cap[Y=1])$ ("pile" et "face" au premier coup), ni $([X=2]\cap[Y=0])$ (le premier "pile" au 2-ième coup et que des "pile") . Donc $[X+Y=2]$ est l'ensemble vide .

(b) On a : $P(X+Y=1) = P([X=0]\cap[Y=1]) + P([X=1]\cap[Y=0])$.

Or $([X=0]\cap[Y=1]) = [X=0]$ (puisque "$X=0$" implique "$Y=1$")
et de même , $([X=1]\cap[Y=0]) = [Y=0]$ ("que des pile" implique "pile au premier coup").

$$\text{Donc : } \quad P(X+Y=1) = P([X=0]) + P([Y=0]) = \frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

(c) (P_1, F_1) est un système complet d'événements donc :

$$\begin{aligned}(X+Y=n) &= ((P_1\cap[X+Y=n]) \cup (F_1\cap[X+Y=n])\\ &= ([X=1]\cap[Y=n-X=n-1]) \cup ([Y=1]\cap[X=n-Y=n-1])\end{aligned}$$

On a donc bien , pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$(X+Y=n) = ([X=1]\cap[Y=n-1]) \cup ([Y=1]\cap[X=n-1])$$

(d) Par incompatibilité des événements on a, pour $n \geqslant 3$:
$P(X+Y=n) = P([X=1]\cap[Y=n-1]) + P([Y=1]\cap[X=n-1])$.
Et d'après 5a) et 5b) : $P(X+Y=n) = P([Y=n-1]) + P([X=n-1]) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Et ,en conclusion : $\boxed{P(X+Y=n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

7. Informatique.
On rappelle que , pour tout entier naturel m, l'instruction `grand(1,1,'uin',0,m)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et m (ceci de façon équiprobable).
On décide de coder "pile" par 1 et "face" par 0 .

(a) Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
piece = rd.randint(0, 3) # c'est le choix de la pièce utilisée
x=1 # au début X vaut 1
if piece==0: # on lancera la pièce 0 et alors P("pile")=P("face")=1/2
        lancer=rd.randint(0,2) # 0 pour "face" et 1 pour "pile"
        while lancer==0 :
                lancer= rd.randint(0,2) # on relance la pièce
                x= x+1
elif piece==1: # on lance la pièce 1 qui ne donne jamais "pile"
        x=0

print(x)
```

(b) Le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 n'est pas pris en compte car si piece ne vaut ni 0, ni 1, c'est qu'il vaut 2 et alors on a "pile" du premier coup et X reste égal à 1, ce qui est bien la valeur correcte dans ce cas .

. Problème

Partie 1 : étude de f

1. (a) Utilisons le théorème de positivité des intégrales.
   - Premier cas : si $x \geqslant 0$.
     - $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
     - $\forall t \in \mathbb{R}, \ln(1+t^2) \geqslant 0$
     - $0 \leqslant x$

     Ainsi, d'après le théorème de positivité de l'intégrale, $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)dt \geqslant 0$
   - Deuxième cas : si $x \leqslant 0$.
     - $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
     - $\forall t \in \mathbb{R}, \ln(1+t^2) \geqslant 0$
     - $x \leqslant 0$

     Ainsi, d'après le théorème de positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_x^0 \ln(1+t^2)dt \geqslant 0$ donc

     $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)dt \leqslant 0$

   $\boxed{f \text{ est positive sur } [0;+\infty[\text{ et négative sur }]-\infty;0]}$

   (b) D'après le théorème fondamental de l'analyse, comme $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$, f est la primitive de $t \mapsto \ln(1+t^2)$ qui s'annule en 0. Donc f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \ln(1+x^2)}$.

   (c) Signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
signe de $f'(x)$	$+$ 0 $+$

   Ainsi, $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

   $f(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} \ln(1+t^2)dt.$

   Utilisons le changement de variable $u = -t$, $du = -dt$. On obtient :

   $f(-x) = \displaystyle\int_0^{x} \ln(1+(-u)^2)(-du) = -\int_0^x \ln(1+u^2)du = -f(x).$

   Ainsi, f est impaire.

   (b) $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $f''(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
signe de $f''(x)$	- 0 $+$

   Ainsi, f est concave sur $]-\infty;0]$ et convexe sur $[0;+\infty[$. Elle admet un point d'inflexion au point de coordonnées $(0;0)$.

3. (a) Soient a et b deux réels tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{at^2+(a+b)}{1+t^2}$$

   ainsi, par identification, on doit avoir : $\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ a+b = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -1 \end{array}\right.$

   Ainsi, $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{t^2}{1+t^2} = 1 - \dfrac{1}{1+t^2}}$

   (b) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)dt$. Posons alors :

$$\begin{array}{ll} u'(t) = 1 & u(t) = t \\ v(t) = \ln(1+t^2) & v'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{array}$$

u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc à l'aide d'une intégration par parties,
$f(x) = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^x - \displaystyle\int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2}dt = x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt.$
Or d'après la question précédente,
$\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = x - \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt.$
Ainsi, $f(x) = x\ln(1+x^2) - 2\left(x - \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt\right) = x(\ln(1+x^2)-2) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$

4. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.
   (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ est une intégrale impropre en $+\infty$.
   - $\dfrac{1}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$
   - $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sont continues et positives sur $[1;+\infty[$.
   - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est convergente (intégrale de Riemann)

   Ainsi, d'après les critères de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ est convergente.
   De plus, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ et $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0;1]$.
   Ainsi, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt \text{ est convergente}}$

   (b) Nous avons démontré à la question 3)b) que $f(x) = x(\ln(1+x^2)-2) + 2\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$.Or,
   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x(\ln(1+x^2)-2) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ est finie d'après la question précédente. Ainsi, $2\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ est négligeable devant $x(\ln(1+x^2)-2)$ au voisinage de $+\infty$.
   Ainsi, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x(\ln(1+x^2)-2)$. Puis, $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln\left(1+x^2\right)}$

   (c) Soit x un réel strictement positif, on a :
   $\ln(1+x^2) = \ln\left(x^2\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)\right) = \ln(x^2) + \ln\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right) = 2\ln(x) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$
   Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2\ln(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0$ donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = o(2\ln(x))$ au voisinage de $+\infty$, donc
   $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln(x)}$

   (d) Comme la fonction f est impaire, on a pour tout x $-f(-x) = f(x)$. Et quand x tend vers $-\infty$, $-x$ tend vers $+\infty$, il suffit alors de remplacer dans l'expression précédente pour trouve : $\boxed{f(x) \underset{-\infty}{\sim} 2x\ln(-x)}$.

5. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.
   (a) $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.
   (b) $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ d'après les calculs précédents. D'autre part,
   $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(3)}(x) = \dfrac{2(1+t^2)-4t^2}{(1+t^2)^2} = \dfrac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$. Ainsi, $f^{(3)}(0) = 2$.
   (c) Ainsi, d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0,
   $f(x) = \dfrac{x^3}{3!}.2 + o(x^3) = \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ donc $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^3}{3}}$

Partie 2 : étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt$.

6. (a) Si on considère l'expression générale de u_n, $u_0 = \displaystyle\int_0^1 1dt = 1$ ce qui est cohérent avec la valeur de u_0 donnée.

   (b) $u_1 = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)dt = f(1)$

7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$

   $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^{n+1} dt - \int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt = \int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n (\ln(1+t^2)-1)dt$

   - $\forall t \in [0;1]$, $\left(\ln(1+t^2)\right)^n \geqslant 0$ et $\ln(1+t^2) - 1 \leqslant 0$
     (en effet, $t \in [0;1] \Rightarrow 0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2) \Rightarrow \ln(1+t^2) - 1 \leqslant 0$)
     ainsi, $\forall t \in [0;1]$, $\quad \left(\ln(1+t^2)\right)^n (\ln(1+t^2)-1) \leqslant 0$.
   - $t \mapsto \left(\ln(1+t^2)\right)^n (\ln(1+t^2)-1)$ est continue sur $[0;1]$.

   Ainsi, d'après la positivité de l'intégrale, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt$. Or,

   - $\forall t \in [0;1]$, $\left(\ln(1+t^2)\right)^n \geqslant 0$
   - $t \mapsto \left(\ln(1+t^2)\right)^n$ est continue sur $[0;1]$.

   Ainsi, d'après la positivité de l'intégrale, $u_n \geqslant 0$ et $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est minorée par 0.}}$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge. (théorème de convergence des suites monotones)

8. (a) Soit $t \in [0;1]$. On alors :
   $0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2) \Rightarrow 0 \leqslant \left(\ln(1+t^2)\right)^n \leqslant (\ln 2)^n$.
   Ot $t \mapsto \left(\ln(1+t^2)\right)^n$ est continue sur $[0;1]$ donc en intégrant, on obtient :
   $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt \leqslant \int_0^1 (\ln(2))^n dt$ soit $\boxed{0 \leqslant u_n \leqslant (\ln 2)^n}$

   (b)
   - On a : $0 \leqslant u_n \leqslant (\ln 2)^n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\ln 2)^n = 0$ donc d'après le théorème de l'encadrement, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$
   - On a : $0 \leqslant u_n \leqslant (\ln 2)^n$ et la série de terme général $(\ln 2)^n$ converge en tant que série géométrique car $|\ln(2)| < 1$. Ainsi, d'après les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$

9. (a) Montrer que : Soit $t \in [0;1]$. On a alors :

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2) \quad &\Rightarrow \quad 1 - \ln(2) \leqslant 1 - \ln(1+t^2) \leqslant 1 \\
&\Rightarrow \quad 1 \leqslant \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{1}{1-\ln(2)} \\
&\Rightarrow \quad 0 \leqslant \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(2)} \text{ car } (\ln(1+t^2))^n \geqslant 0 \\
&\Rightarrow \quad 0 \leqslant \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} dt \leqslant \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(2)} dt \text{ les fonctions sont continues} \\
&\Rightarrow \quad \int_0^1 0 \leqslant \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{1}{1-\ln(2)} \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n dt \\
&\Rightarrow \quad 0 \leqslant \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{u_n}{1-\ln(2)}
\end{aligned}$$

   (b) On a :
   $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt \leqslant \frac{u_n}{1-\ln 2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc d'après le théorème de l'encadrement,
   $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt = 0}$

(c) Soit n un entier naturel non nul :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} u_k &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^k dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (\ln(1+t^2))^k\right) dt \text{ linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt \text{ somme des termes d'une suite géométrique}\end{aligned}$$

(d) Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} dt - \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt.$$

Or d'après la question 10)b), $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt = 0$ donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} dt$

soit $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} dt}$