Type EDHEC

E C G

CONCOURS BLANC N°1

Option Économique

MATHÉMATIQUES

3 Septembre 2025

. Exercice n°1

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 4A$. En déduire que A est inversible et déterminer sa matrice inverse.
2. (a) (*) En déduire la seule valeur propre de A .
   (b) (*) La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Montrer que $E_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$ est un espace vectoriel engendré par $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
4. (a) On pose $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (b) Calculer Au_3 en fonction de u_1, u_2 et u_3, puis vérifier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) (vue comme base de $\mathbb{R}^3$) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 2.
   (c) En écrivant $T = 2I_3 + N$, déterminer , pour tout entier naturel n , la matrice T^n comme combinaison linéaire de I_3 et N , puis de I_3 et T .
5. (a) (*) Justifier qu'il existe une matrice inversible P telle que $A = PTP^{-1}$.
   (b) En admettant le résultat de la question précédente, en déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^nI$$
   (c) Vérifier que la formule trouvée à la question $5b$) reste valable pour $n = -1$.

. Exercice n°2

On considère les fonction f et φ définies par

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x\ln(x)-1 & \text{si} \quad x>0 \\ -1 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}, \qquad \forall x>0, \quad \varphi(x)=\frac{2}{x}+\ln(x)$$

On donne le tableau de valeurs de f :

$x=$	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4
$f(x)\simeq$	$-0,4$	0	$0,6$	$1,6$	3	$4,7$	$6,9$	$9,5$

On définit la suite (u_n) par : $u_0=\dfrac{3}{2}$ et $\forall n\in\mathbb{N}, \quad u_{n+1}=\varphi(u_n)$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0. En donner une interprétation graphique.
3. Dresser son tableau de variations en précisant la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini. *(On pourra passer par la dérivée seconde)*
4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle J que l'on précisera.
5. Quel est le sens de variation de f^{-1} ? Déterminer la limite de $f^{-1}(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
6. (a) Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) On donne $\varphi(\frac{3}{2})\simeq 1,73$ et $\varphi(2)\simeq 1,69$. Montrer que $\varphi\left(\left[\frac{3}{2};2\right]\right)\subset\left[\frac{3}{2};2\right]$.
   (c) En étudiant les variations de φ', montrer que : $\forall x\in\left[\frac{3}{2};2\right], \quad |\varphi'(x)|\leqslant\frac{2}{9}$.
7. Montrer que les équations $x=\varphi(x)$ et $f(x)=1$ sont équivalentes. En déduire que le réel x_1 est l'unique solution de l'équation $x=\varphi(x)$.
8. (a) Montrer que pour tout entier n :
$$\frac{3}{2}\leqslant u_n\leqslant 2$$
   (b) En déduire que pour tout entier n
$$|u_{n+1}-x_1|\leqslant\frac{2}{9}\,|u_n-x_1|$$
   (c) Montrer que pour tout entier n
$$|u_n-x_1|\leqslant\left(\frac{2}{9}\right)^n.$$
   (d) En déduire la limite de la suite (u_n).
   (e) Ecrire un nouveau programme Python permettant de donner une valeur approchée de x_1 avec une précision 10^{-3}.

. Exercice n°3

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir "face" vaut également $\frac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant "pile" à coup sûr et une troisième pièce, numérotée 2, donnant "face" à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.

Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient "pile" au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier "pile" et la variable aléatoire Y , égale au rang d'apparition du premier "face". On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "pile" et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "face".

1. (a) À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que $P(X = 1) = \dfrac{1}{2}$.
   (b) Montrer que : $\forall n \geqslant 2, P(X = n) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   (c) En déduire la valeur de $P(X = 0)$
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer .
3. Montrer que $X(X - 1)$ possède une espérance. En déduire que X possède une variance et vérifier que $V(X) = \dfrac{4}{3}$.
4. Justifier que Y suit la même loi que X.
5. (a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P([X = 1] \cap [Y = j]) = P([Y = j])$.
   (b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $P([X = i] \cap [Y = 1]) = P([X = i])$.
6. Loi de $X + Y$.
   (a) Expliquer pourquoi $X + Y$ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.
   (b) Montrer que $P(X + Y = 1) = \dfrac{2}{3}$.
   (c) Justifier que , pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :
   $$(X + Y = n) = ([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - 1])$$
   (d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :
   $$P(X + Y = n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
7. Informatique. On importe les modules `numpy as np` et `numpy.random as rd`. On rappelle que , pour tout entier naturel m, l'instruction `rd.randint(0,m)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et $m - 1$ (ceci de façon équiprobable).
   On décide de coder "pile" par 1 et "face" par 0 .
   (a) Compléter le script `Python` suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
piece = rd.randint(... , ...)
x=1
if piece==0:
        lancer=rd.randint(... , ...)
    while lancer==0 :
        lancer= ...
        x= ...
elif piece==1:
        x=...

print(x)
```

   (b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

. Problème

On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $f(x) = \int_0^x \ln\left(1+t^2\right) dt$.

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

. 1 Étude de f

1. (a) Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x.
   (b) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
   (c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à calculer les limites de f).
2. (a) Montrer que f est impaire.
   (b) Etudier la convexité de f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
3. (a) Déterminer les réels a et b tels que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{t^2}{1+t^2} = a + \dfrac{b}{1+t^2}$.
   (b) En déduire, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel x, on a :
$$f(x) = x\left(\ln(1+x^2) - 2\right) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$
4. (a) (*) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ est une intégrale convergente.
   (b) (*) En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln\left(1+x^2\right)$.
   (c) Vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\ln(1+x^2) = 2\ln(x) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$, puis établir l'équivalent suivant :
$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln(x)$$
   (d) Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de $-\infty$.

5. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.
   (a) Montrer que f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.
   On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction f, c'est à dire :
$$f(x) = f(0) + \frac{x^1}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + o(x^3)$$
   (b) Déterminer $f(0), f'(0), f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$.
   (c) En déduire alors un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

. 2 Étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt$.

6. (a) La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ?
   (b) Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f.
7. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.
8. (a) Etablir l'encadrement suivant : $0 \leqslant u_n \leqslant (\ln 2)^n$
   (b) Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
9. (a) Montrer que :
$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt \leqslant \frac{u_n}{1-\ln 2}$$
   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt$.
   (c) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt$$
   (d) En déduire que l'on a :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}dt$$