Correction d'exercices

. Correction de l'exercice n°5

1. $a(x) = x^3 + 4x^2 - 1$ en ∞ et en 0. Il s'agit d'un polynôme, donc
$$a(x) \underset{+\infty}{\sim} x^3 \qquad a(x) \underset{0}{\sim} -1$$

2. $b(x) = \dfrac{5x^2 - x + 3}{2x^4 - x + 1}$ en ∞ et en 0. On étudie des équivalents du numérateur et du dénominateur :
$$5x^2 - x + 3 \underset{+\infty}{\sim} 5x^2 \qquad 5x^2 - x + 3 \underset{0}{\sim} 3$$
$$2x^4 - x + 1 \underset{+\infty}{\sim} 2x^4 \qquad 2x^4 - x + 1 \underset{0}{\sim} 1$$
Donc par quotient :
$$b(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{5}{2x^2} \qquad b(x) \underset{0}{\sim} 3$$

3. $c(x) = e^{\sqrt{x}} - 1$ en 0. On pose $u = \sqrt{x}$. Alors u tend vers 0 lorsque x tend vers 0 et comme $e^u - 1 \underset{0}{\sim} u$
$$c(x) \underset{0}{\sim} \sqrt{x}$$

4. $d(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ en 0. On pose $u = x^2 + x$. Alors u tend vers 0 lorsque x tend vers 0 et comme $\ln(1 + u) \underset{0}{\sim} u$
$$d(x) \underset{0}{\sim} x^2 + x \underset{0}{\sim} x$$

5. $e(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^3}} - 1$ en $+\infty$.
On pose $u = \dfrac{1}{x^3}$. Alors u tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et comme $\sqrt{1+u} - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{u}{2}$,
$$e(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x^3}$$

6. $f(x) = \ln(1 + 2x)(e^{\sqrt{x}} - 1)$ en 0. On a $\ln(1 + 2x) \underset{0}{\sim} 2x$ car $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$, et on a vu que $e^{\sqrt{x}} - 1 \underset{0}{\sim} \sqrt{x}$, donc
$$f(x) \underset{0}{\sim} 2x\sqrt{x}$$

7. $g(x) = \dfrac{e^{-x^2} - 1}{x^2 + x}$ en 0. On a $e^{-x^2} - 1 \underset{0}{\sim} -x^2$ car $\lim\limits_{x\to 0} -x^2 = 0$, et $x^2 + x \underset{0}{\sim} x$, donc
$$f(x) \underset{0}{\sim} -x$$

8. $h(x) = \dfrac{\ln(1 + 2x^2)}{\sqrt{1 + 3x^2} - 1}$ en 0. On a $\ln(1 + 2x^2) \underset{0}{\sim} 2x^2$ car $\lim\limits_{x\to 0} 2x^2 = 0$, et $\sqrt{1 + 3x^2} - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{3x^2}{2}$ car $\lim\limits_{x\to 0} 3x^2 = 0$, donc
$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{4}{3}$$

9. $i(x) = \ln(1 + \dfrac{1}{x^2})$ en $+\infty$. On a $\ln(1 + \dfrac{1}{x^2}) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ car $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

10. $\dfrac{1}{1+x^2+\sqrt{x}}$ en $+\infty$. Comme $1 = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(x^2)$ et $x = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(x^2)$ alors $\dfrac{1}{1+x^2+\sqrt{x}} = \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.

11. $\dfrac{1}{1+x^2+\sqrt{x}}$ en 0^+ Comme $\lim\limits_{x\to 0} 1+x^2+\sqrt{x} = 1$, $\dfrac{1}{1+x^2+\sqrt{x}} \underset{0}{\sim} 1$

12. $x+\sqrt{x}+\ln x$ en de $+\infty$ Par croissances comparées, on sait que $\ln(x) = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(x)$. De plus $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = 0$ et $\sqrt{x} = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(x)$. On en déduit que
$$x+\sqrt{x}+\ln x \underset{+\infty}{\sim} x$$

13. $x+\sqrt{x}+\ln x$ en 0^+. On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln(x)} = 0$ et que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x)} = 0$, donc $x+\sqrt{x} = \underset{0}{\mathrm{o}}(\ln(x))$ et
$$x+\sqrt{x}+\ln x \underset{0}{\sim} \ln(x)$$

14. $\dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2+1+\ln x}$ en $+\infty$.
Comme $\sqrt{x} = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(x)$, $x+\sqrt{x} \underset{+\infty}{\sim} x$. Par croissances comparées $\ln(x) = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(x^2)$, donc $x^2+1+\ln x \underset{+\infty}{\sim} x^2$. Donc
$$\frac{x+\sqrt{x}}{x^2+1+\ln x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

15. $\dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2+1+\ln x}$ en 0^+.
Comme $x = \underset{0}{\mathrm{o}}(\sqrt{x})$, $x+\sqrt{x} \underset{0}{\sim} \sqrt{x}$. De plus, $1+x^2 = \underset{0}{\mathrm{o}}(\ln(x))$, donc $x^2+1+\ln x \underset{0}{\sim} \ln(x)$. Donc
$$\frac{x+\sqrt{x}}{x^2+1+\ln x} \underset{0}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$$