

**EXERCICE 1**

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels :

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.
- $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$.

**EXERCICE 2**

Pour les ensembles suivants indiquer s'il s'agit d'un espace vectoriel de dimension finie, et si oui en donner une base.

- $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 4y + z = 0\}$
- $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$
- $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y^2\}$
- $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0\}$
- $E_5 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z - 3t = 0 \text{ et } 2y + 3z + t = 0\}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $E_6 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = 0\}$
- $E_7 = \left\{ \begin{pmatrix} 2a+3b & a-b \\ a+b & -a+2b \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
- E_8 est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b & a+b \\ b & c & a \\ c & a & a+c \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels quelconques.
- $E_9 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P'(0) = 0\}$
- $E_{10} = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid XP'(X) - P(X+1) = 0\}$
- $E_{11} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} - 7u_{n+1} + 12u_n = 0\}$
- $E_{12} = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$. Montrer que E est un SEV de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner une base de E .
- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $E_{13} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = 0\}$.
- $E_{14} = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \forall x \in \mathbb{R}, P(x) + P(-x) = 0\}$
- $E_{15} = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \forall x \in \mathbb{R}, xP'(x) - P(x+1) = 0\}$
- $E_{16} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0\}$
- $E_{17} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F = \left\{ f \in E \mid \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \ln \left(\frac{(1+x^2)^\alpha}{(\sqrt{1+x^4})^\beta} \right) \right\}$
- $E_{18} = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \int_0^1 P(x)dx = 0 \right\}$

**EXERCICE 3**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (A - \lambda I)X = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles ce sous-espace vectoriel n'est pas réduit à $\{0\}$.
3. Pour chacune de ces valeurs de λ déterminer une base du sous-espace vectoriel correspondant.

**EXERCICE 4**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (A - \lambda I)X = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles ce sous-espace vectoriel n'est pas réduit à $\{0\}$.
3. Pour chacune de ces valeurs de λ déterminer une base du sous-espace vectoriel correspondant.

**EXERCICE 5**

Soit les suites u, v, w définies par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n, v_n = 3^n, w_n = 4^n$. La famille (u, v, w) est-elle une famille libre ?

**EXERCICE 6**

Pour quelles valeurs de m la famille $((3, 1, -4, 6), (1, 1, 4, 4), (1, 0, -4, m))$ est-elle liée ? Lorsqu'elle est libre est-ce une base de $\mathbb{R}^4$?

**EXERCICE 7**

Soit $u_1 = (2, 1, -1), u_2 = (2, -1, 2), u_3 = (3, 0, 1)$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées $(4, 8, -3)$ dans cette base.

**EXERCICE 8**

Soit $u_1 = (0, 1, 2)$, $u_2 = (2, 1, 3)$, $u_3 = (2, 1, 1)$. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ? Est-ce une base de $\mathbb{R}^3$?

**EXERCICE 9**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que (A, B, C, D) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les coordonnées dans cette base de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

**EXERCICE 10**

Soit $u_1 = (1, m, m^2)$, $u_2 = (m, m^2, 1)$, $u_3 = (m^2, 1, m)$.

1. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Dans ce cas déterminer les coordonnées de $(1, 1, 1)$ dans cette base.

**EXERCICE 11**

Dans $\mathbb{R}[X]$, $P_0 = (X - 1)(X + 1)$, $P_1 = (X + 1)(X - 2)$, $P_2 = (X - 1)(X - 2)$. Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une famille libre. Caractériser l'espace vectoriel engendré par cette famille.

**EXERCICE 12**

Soit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, et $F = Vect(I, A, B)$.

1. La famille (I, A, B) est-elle une base de F ?
2. Les matrices suivantes appartiennent-elles à F ? Si oui donner leurs coordonnées dans la base $B_1 = (I, A, B)$.
3. Soit $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Montrer que (A, M_2, M_3) est une base de F , et écrire la matrice de passage de (I, A, B) vers (A, M_2, M_3) .

**EXERCICE 13**

Soit $Q_1 = X^3$, $Q_2 = X^2(X - 1)$, $Q_3 = X(X - 1)^2$, $Q_4 = (X - 1)^3$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3$. Quelles sont les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$?

**EXERCICE 14**

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, $P_0 = (X - 1)(X + 1)$, $P_1 = (X + 1)(X - 2)$, $P_2 = (X - 1)(X - 2)$.

1. Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ vers (P_0, P_1, P_2) .
3. Quelles sont les coordonnées dans cette base du polynôme Q défini par $Q(x) = 6 - 2x + x^2 - x^3$?

**EXERCICE 15**

Soit les 4 fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x$, $f_2(x) = e^x$, $f_3(x) = e^{-x}$, $f_4(x) = e^{x+2}$. Quel est le rang de la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) ? Déterminer une base de $Vect(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

**EXERCICE 16**

Soit $\mathcal{B}_1 = ((1, 1, 1), (0, 3, 2), (1, 2, 2))$, $\mathcal{B}_2 = ((3, 1, 2), (3, 1, 1), (2, 1, 1))$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bases de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$.
3. Soit un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{B}_1$ et de coordonnées (X, Y, Z) dans $\mathcal{B}_2$. Exprimer X, Y et Z en fonction de x, y, z .

**EXERCICE 17**

Déterminer le rang des familles suivantes : (a) $((1, 2), (-3, -6))$

(b) $((1, 2), (3, 4), (5, 6))$

(c) $((1, 3, -3), (4, 2, -3), (-1, 7, 6))$

(d) $((4, -5, 3), (2, 3, -2), (4, -16, 10), (8, 1, -1))$

(e) $(2, 3 + X, 7 - 6X^2)$

**EXERCICE 18**

Soit un espace vectoriel E et une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et soit $\mathcal{B}' = (\vec{i}, \vec{j} + 2\vec{k}, 2\vec{j} + \vec{k})$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E .
2. Quelles sont les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ du vecteur de coordonnées $(-1, 3, 5)$ dans $\mathcal{B}$?

**EXERCICE 19**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel, en donner une base ainsi que sa dimension.
2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n \in F$.
(b) Après avoir vérifié que la famille ci-dessous forme une base de F , déterminer les coordonnées de A^n dans celle-ci :

$$\left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

3. Soit $G = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid {}^tAM = M^tA\}$.
(a) Montrer que $M \in G \Leftrightarrow {}^tM \in F$.
(b) En déduire une base de G ainsi que sa dimension.

**EXERCICE 20**

Pour $0 \leq k \leq n$, on note $P_k(X) = X^k(1 - X)^{n-k}$. Le but de l'exercice est de démontrer que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Quel est le terme de plus bas degré de P_k ?
2. On suppose que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est liée.
(a) Justifier qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ tel que

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i(X) = 0$$

- (b) Justifier que l'ensemble $A = \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid \lambda_k \neq 0\}$ est non vide.
- (c) On pose alors $k_0 = \min\{k \in A\}$. Quel est le terme de degré k_0 dans $\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i(X)$.
- (d) Conclure

**EXERCICE 21**

Soit E un espace vectoriel et A un sous-espace vectoriel de E . Montrer que $0 \in A$.

**EXERCICE 22**

Soit E un espace vectoriel et A, B deux sous espaces vectoriels de E . Montrer que $A \cap B$ est un sous espace vectoriel de E . Est ce vrai pour $A \cup B$?

**EXERCICE 23**

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. la famille $(x \mapsto x, x \mapsto x^2, x \mapsto x^3)$ est elle libre? Est elle une famille génératrice de E ?
2. Montrer que la famille $(x \mapsto e^{kx})_{0 \leq k \leq n}$ est libre (pensez au théorème des croissances comparées). Est ce une famille génératrice de E ?

**EXERCICE 24**

1. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un réel α tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \alpha x$$

2. Étudier la réciproque.
3. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \alpha x + \beta y$$

4. Étudier la réciproque.

**EXERCICE 25**

Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $F = \{f \in E \mid f'' = 2f' - f\}$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E
2. Montrer que $F \neq E$.
3. Soient les fonctions définies pour x réel par

$$f_1(x) = e^x \quad f_2(x) = xe^x$$

Montrer que f_1, f_2 forment une famille libre de F .

**EXERCICE 26**

À tout couple (a, b) de deux réels, on associe la matrice $M(a, b)$ définie par

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a, b)$ où a et b décrivent $\mathbb{R}$. On note I la matrice identité $M(1, 0)$, et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Donner une base ainsi que sa dimension

**EXERCICE 27**

On considère les trois matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note E l'ensemble des matrices M carrées d'ordre 2 telles que $AM = MD$.

1. Vérifier que E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que M appartient à E si et seulement si $z = 0$ et $y = t$.
3. Etablir que (U, A) est une base de E .
4. Calculer le produit UA . Est-ce que UA est un élément de E ?

**EXERCICE 28**

On considère les trois matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par I, J et K . Pour toute matrice M de E , on note $M^0 = I$, et si M est inversible, on note, pour tout entier naturel k , $M^{-k} = (M^{-1})^k$, et on rappelle qu'alors M^k est inversible, d'inverse $(M^k)^{-1} = M^{-k}$.

1. Déterminer la dimension de E .
2. Calculer J^2, JK, KJ , et K^2 .
3. Soit la matrice $L = I + J$.

- (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$.
- (b) Vérifier que L est inversible et montrer que, pour tout entier relatif n , $L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$.
- (c) Exprimer, pour tout entier relatif n , L^n à l'aide de I, L, L^2 et n .

**EXERCICE 29**

On associe à tout triplet (x, y, z) de nombres réels, la matrice :

$$M(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$$

La matrice $M(1, 0, 0)$ n'est autre que I_3 et la matrice $M(0, 1, 0)$ est notée J .

1. (a) Calculer les matrices J^2 et J^3 .
(b) Etablir que l'ensemble E des matrices de la forme $M(x, y, z)$, où (x, y, z) décrit $\mathbb{R}^3$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
(c) Etablir que (I_3, J, J^2) forme une base de E .
2. Calculer le produit $M(x, y, z) \times M(x', y', z')$ et montrer que celui-ci est un élément de E . Les matrices $M(x, y, z)$ et $M(x', y', z')$ commutent-elles?
3. En déduire l'égalité suivante

$$M(x, y, z) \times M(x^2 - yz, z^2 - xy, y^2 - zx) = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]I_3$$

4. Etablir qu'une condition suffisante pour que $M(x, y, z)$ soit inversible est que x, y, z soient tels que $x + y + z \neq 0$ et pas tous égaux. Quelle est alors la matrice inverse de $M(x, y, z)$?
5. Etablir enfin que cette condition suffisante d'inversibilité est également nécessaire.

**EXERCICE 30**

On considère les matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $E = \text{Vect}(I, J, K, L)$.

1. (a) Montrer que (I, J, K, L) est libre.
(b) Donner la dimension de E .
2. (a) Montrer, en les calculant explicitement, que J^2, K^2, L^2, J^3 , et L^3 appartiennent à E .
(b) En déduire, sans aucun calcul matriciel, que JK, KJ, KL, LK, JL et LJ appartiennent aussi à E ?
(c) Etablir enfin que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E .

**EXERCICE 31**

Soit la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $MK = KM = M$.

1. (a) Montrer que E est un espace vectoriel.
(b) Montrer par l'absurde qu'aucune matrice de E n'est inversible.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ une matrice de E .
(a) Montrer que $k = g = c = a$, $h = b$, et $f = d$, puis en déduire la forme des matrices de E .
(b) Donner une base de E et vérifier que $\dim(E) = 4$.