Composite

E C G

Correction DS n°2

Option Économique

MATHÉMATIQUES

15 Septembre 2025

Exercice n°1 - Inspiré d'EDHEC 2008

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{e^x+1} + nx$.

1. La fonction $x \mapsto e^x + 1$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule jamais (somme de fonctions usuelles $\mathcal{C}^\infty$), il en est de même pour son inverse. La fonction $x \mapsto nx$ est également $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (fonction affine).
   $\boxed{\text{Ainsi, } f_n \text{ est bien de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$
2. (a) On vient de montrer que f_n est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc pur tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n'(x) = \boxed{\frac{-e^x}{(e^x+1)^2} + n}$$
$$f_n''(x) = \frac{-e^x\,(e^x+1)^2 + 2e^x\,(e^x+1)\,e^x}{(e^x+1)^4}$$
$$= \boxed{\frac{e^x\,(e^x-1)}{(e^x+1)^3}}$$

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x < (e^x+1)^2$, donc pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$n \geq 1 \geq \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \quad \text{donc } f'(n) > 0$$

   Ainsi $\boxed{f \text{ est strictement croissante.}}$

3. Comme $e^x + 1 \to +\infty$ quand $x \to +\infty$, on peut écrire

$$f_n(x) \underset{+\infty}{=} nx + o(1) \Longrightarrow \boxed{f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} nx}$$

   En particulier, on en déduit que $f_n(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$. Attention, l'équivalent en $+\infty$ à une fonction affine ne donne pas nécessairement l'existence d'une asymptote, il faut que la différence entre $f_n(x)$ et la candidate asymptote tende vers 0 (sinon c'est une branche parabolique). Ici,

$$\boxed{f_n(x) - nx = \frac{1}{e^x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

   donc $\boxed{y = nx \text{ est bien asymptote à la courbe de } f_n \text{ en } +\infty.}$
   En $-\infty$, on observe que $e^x + 1$ tend vers 1 , donc

$$f_n(x) - (nx+1) = \frac{1}{e^x+1} - 1 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui permet de déduire que $\boxed{y = nx + 1 \text{ est asymptote à la courbe en } -\infty}$,
que $\boxed{f_n(x) \sim nx + 1 \text{ quand } x \to -\infty}$ et que $\boxed{f_n(x) \to -\infty \text{ quand } x \to -\infty.}$

4. Le tableau de signe de la dérivée seconde se dresse sans la moindre difficulté, la quantité étant du signe de $e^x - 1$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n''(x)$		-	0	$+$	

Il y a donc un seul point d'inflexion, d'abscisse $x = 0$. Son ordonnée vaut $f_n(0) = 1/2$. Le point A_n a pour coordonnées $(0; 1/2)$. En ce point, la tangente à la courbe a pour équation $y = f_n'(0)x + f_n(0)$, c'est à dire

$$\boxed{y = \left(n - \frac{1}{4}\right)x + \frac{1}{2}}$$

5. L'équation de la tangente précédemment trouvée nous donne la partie régulière du DL à l'ordre 1, mais comme la dérivée seconde s'annule (point d'inflexion, n'oublions pas), on a immédiatement le DL à l'ordre 2, d'après la formule de Taylor-Young

$$\boxed{f_n(x) = \frac{1}{2} + \left(n - \frac{1}{4}\right)x + o\left(x^2\right)}$$

On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o\left(x^3\right)$$

6. Il faut dériver trois fois et évaluer les dérivées successives en 0 . Aucune difficulté. On trouve

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right), \quad \frac{1}{1+x} = \boxed{1 - x + x^2 - x^3 + o\left(x^3\right)}$$

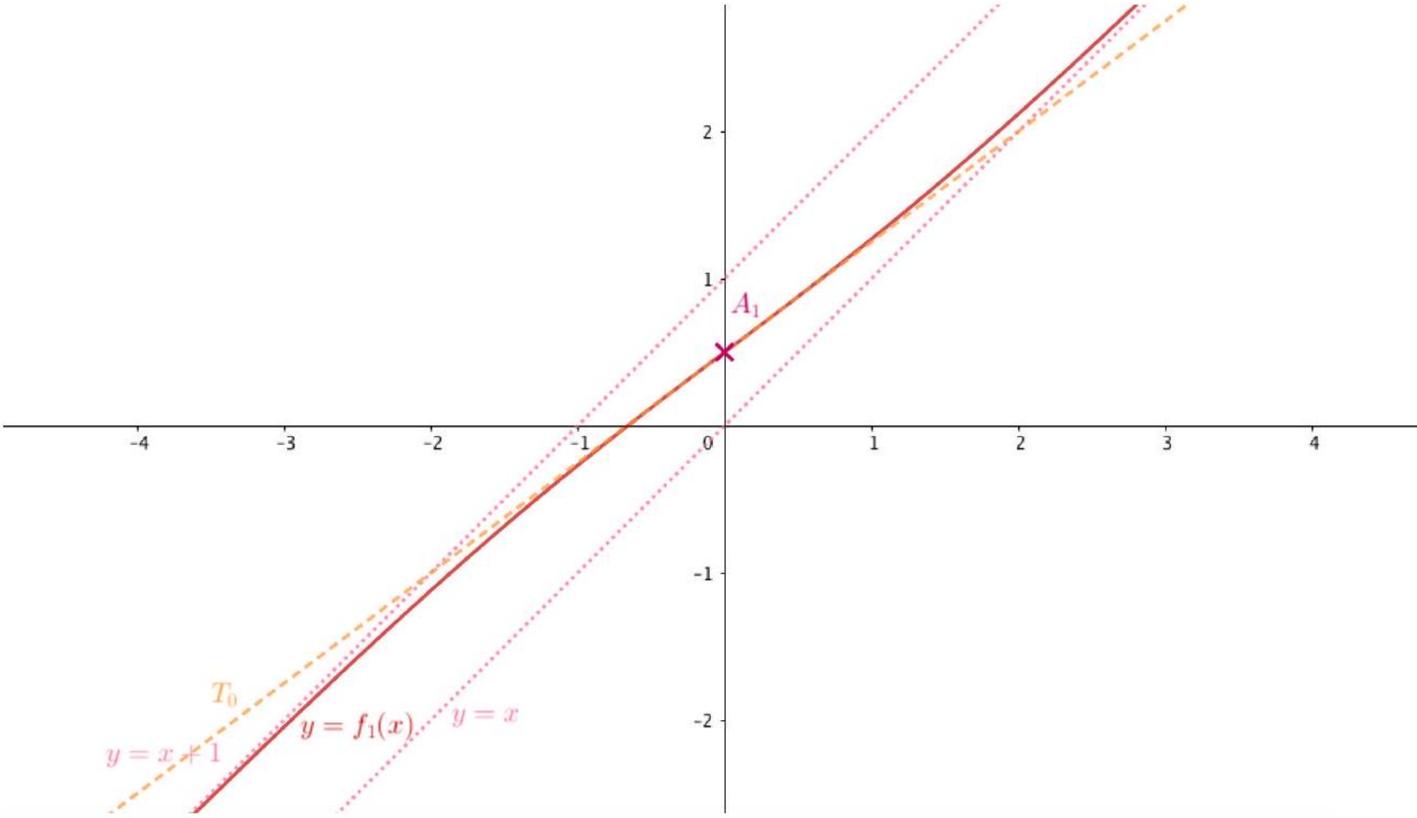
7. C'est LA question un peu technique de l'exercice. Mais on s'en sort grâce à l'indication

$$\begin{aligned}
f_n(x) =& \frac{1}{e^x + 1} + nx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{e^x - 1}{2}\right)} + nx \\
=& \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{x + x^2/2 + x^3/6 + o(x^3)}{2}} + nx \\
=& \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)\right)} + nx \\
=& \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)\right)^2\right. \\
&\left. - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)\right)^3 + o\left(x^3\right)\right) + nx
\end{aligned}$$

Il sort du terme à la puissance 3 seulement $x^3/8 + o\left(x^3\right)$. En revanche, il sort du terme à la puissance 2 un carré et un double produit, c'est à dire $x^2/4 + x^3/4 + o\left(x^3\right)$. Au final,

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{8} + o\left(x^3\right)\right) + nx \\
&= \boxed{\frac{1}{2} + \left(n - \frac{1}{4}\right)x + \frac{x^3}{48} + o\left(x^3\right)}
\end{aligned}$$

8. Les asymptotes ont pour équations $y = x($ en $+\infty)$ et $y = x+1$ (en $-\infty$). La tangente en O a pour équation $y = (3/4)x + 1/2$. On fait apparaitre toutes ces informations sur un joli dessin.



9. D'après l'étude précédente, f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante. Par le théorème de bijection, elle en réalise une de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (d'après les limites précédemment trouvées). En particulier, 0 admet un unique antécédent par f_n, que l'on note u_n et on a bien le résultat demandé.

10. Afin d'obtenir l'encadrement demandé, on compare les images par f_n et on conclut grâce à la stricte croissance de celle-ci. En effet, $f_n(0) = 1/2 > 0$, et $f_n(1/n) = 1/\left(1 + e^{-1/n}\right) - 1 < 0$ car $1 + e^{-1/n} > 1$. On a donc
$$f_n\left(-\frac{1}{n}\right) < f_n\left(u_n\right) = 0 < f_n(0)$$
et donc, par stricte croissance de f_n,
$$\boxed{-\frac{1}{n} < u_n < 0}$$
En appliquant le théorème des gendarmes, on a immédiatement que $\boxed{u_n \longrightarrow 0 \text{ quand } n \to +\infty.}$

11. Par définition,
$$\frac{1}{1+e^{u_n}} + nu_n = 0 \Longleftrightarrow u_n = -\frac{1}{n\left(1+e^{u_n}\right)}$$
Or, $u_n \to 0$ donc $1 + e^{u_n} \to 2$, donc
$$\frac{1}{e^{u_n}+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$$
et, par produit d'équivalents,
$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}}$$

Exercice n°2 - EML 2024

1. On trouve $\boxed{A^2 = -I_2}$. On en déduit $(-A)A = I_2$, par conséquent $\boxed{A \text{ est inversible avec } A^{-1} = -A}$.
2. On a $A^2 + I_2 = 0_2$, de manière équivalente $x^2 + 1$ est un polynôme annulateur de A. Comme $x^2 + 1 \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, il vient que $x^2 + 1$ n'a pas de racine réelle, ce qui entraîne que A ne possède pas de valeur propre réelle, en particulier $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$.
3. Le sous–ensemble $\mathcal{C}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ satisfait les deux conditions suivantes :
   - $\mathcal{C}$ est non vide car il contient la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   - $\mathcal{C}$ est stable par combinaison linéaire. En effet, soit $(M, N) \in \mathcal{C}^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} A(\lambda M + N) &= \lambda AM + AN \\ &= \lambda MA + NA \quad (\text{car } M, N \in \mathcal{C}) \\ &= (\lambda M + N)A, \end{aligned}$$

   donc $\lambda M + N \in \mathcal{C}$.

   En conclusion : $\boxed{\mathcal{C} \text{ est un sous–espace vectoriel de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

4. (a) Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} AM = MA &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = -b \\ d = a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ de l'équation } AM = MA \text{ sont les matrices } \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \text{ avec } a, c \in \mathbb{R}.}$$

   (b) D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \ ; \ (a, c) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ (a, c) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ aI_2 + cA \ ; \ (a, c) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect}(I_2, A). \end{aligned}$$

   Ainsi (I_2, A) est une famille génératrice de $\mathcal{C}$. Cette famille est de plus libre car les matrices I_2 et A ne sont pas colinéaires. Finalement $\boxed{(I_2, A) \text{ forme une base de } \mathcal{C}}$.

5. (a) Soit $M = aI_2 + bA$ et $N = cI_2 + dA$ deux matrices de $\mathcal{C}$, alors

$$\begin{aligned} MN &= (aI_2 + bA)(cI_2 + dA) \\ &= acI_2 + adA + bcA + bdA^2 \\ &= (ac - bd)I_2 + (ad + bc)A \quad (\text{car } A^2 = -I_2). \end{aligned}$$

   Ainsi $\boxed{MN \in \mathcal{C}}$.

(b) Les matrices M et N sont des combinaisons linéaires de I_2 et A, or les matrices I_2 et A commutent, donc $\boxed{M \text{ et } N \text{ commutent}}$ par distributivité du produit matriciel.

6. Soit $M = aI_2 + bA$ une matrice non nulle de $\mathcal{C}$, c'est–à–dire avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Alors

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det(M) = a^2 + b^2 > 0.$$

Ainsi la matrice $\boxed{M \text{ est inversible avec } M^{-1} = \dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}}$ d'après une formule du cours.

7. (a) On a :

$$\begin{aligned} M^2 &= (aI_2 + bA)^2 \\ &= a^2 I_2 + 2abA + b^2 A^2 \quad (A \text{ et } I_2 \text{ commutent}) \\ &= \boxed{(a^2 - b^2)I_2 + 2abA} \quad (\text{car } A^2 = -I_2). \end{aligned}$$

(b) Ainsi,

$$\begin{aligned} P(M) = 0_2 &\Leftrightarrow M^2 + uM + vI_2 = 0_2 \\ &\Leftrightarrow \left[(a^2-b^2)I_2 + 2abA\right] + u(aI_2 + bA) + vI_2 = 0_2 \quad (\text{vu la question a}) \\ &\Leftrightarrow (a^2 - b^2 + ua + v)I_2 + (2ab + ub)A = 0_2 \quad (\text{en regroupant selon } I_2 \text{ et } A) \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - b^2 + ua + v &=& 0 \\ 2ab + ub &=& 0 \end{array} \right. \quad (\text{car la famille } (I_2, A) \text{ est libre}) \end{aligned}$$

8. (a) En posant $b = 0$ on a :

$$\begin{aligned} P(M) = 0_2 &\Leftrightarrow a^2 + ua + v = 0 \\ &\Leftrightarrow P(a) = 0. \end{aligned}$$

Or, par hypothèse, cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta \geq 0$, elle admet donc une solution réelle. $\boxed{\text{Le système admet bien une solution de la forme } (a,0).}$

(b) On suppose maintenant $b \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} P(M) = 0_2 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - b^2 + ua + v &=& 0 \\ 2a + u &=& 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - b^2 + ua + v &=& 0 \\ a &=& -\dfrac{u}{2} \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{u^2}{4} - b^2 - \dfrac{u^2}{2} + v &=& 0 \\ a &=& -\dfrac{u}{2} \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} b^2 &=& v - \dfrac{u^2}{4} \\ a &=& -\dfrac{u}{2} \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} b^2 &=& -\dfrac{\Delta}{4} \\ a &=& -\dfrac{u}{2} \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} b &=& \pm\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2} \\ a &=& -\dfrac{u}{2} \end{array} \right. \quad (\text{car } \Delta < 0) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{On trouve que le système admet exactement deux solutions de la forme } (a,b) \text{ avec } b \neq 0.}$

9. Dans le cas présent on a $P(x) = x^2 + x + 1$, ce polynôme a pour discriminant $\Delta = -3 < 0$, ainsi on se situe dans le cadre de la question précédente avec $u = 1$ et $v = 1$. D'après les calculs de la question précédente,

$$\boxed{M \;=\; -\frac{1}{2}I + \frac{\sqrt{3}}{2}A \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}}$$

est solution de l'équation $M^2 + M + I_2 = 0_2$.

10. Il suffit de montrer que l'application $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est linéaire. Soient $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\lambda M + N) = A(\lambda M + N)A = \lambda AMA + ANA = \lambda\varphi(M) + \varphi(N).$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

11. Pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\varphi \circ \varphi(M) = \varphi(AMA) = A^2MA^2 = (-I)M(-I) = M.$$

Donc $\boxed{\varphi \circ \varphi = id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}, \text{ ainsi } \varphi \text{ est bijective et } \varphi^{-1} = \varphi}$.

12. (a) On trouve $\varphi(E_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\varphi(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi(E_4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ainsi

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) La matrice $\boxed{B \text{ est diagonalisable car symétrique}}$.

On remarque que $B^2 = I_4$, ainsi $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ est un polynôme annulateur de B d'où

$$\boxed{\mathrm{Sp}(B) \subset \{-1, 1\}}.$$

Montrons que le spectre de B n'est pas réduit à une seule valeur propre. Supposons par l'absurde $\mathrm{Sp}(B) = \{1\}$, alors il existe une matrice inversible $P ß\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $B = PI_4P^{-1} = PP^{-1} = I_4$, ce qui est impossible ; en conclusion $\mathrm{Sp}(B) \neq \{1\}$. Le même raisonnement montre qu'on ne peut avoir $\mathrm{Sp}(B) = \{-1\}$, donc $\boxed{\mathrm{Sp}(B) = \{-1, 1\}}$.

(c) On remarque que

$$\varphi(I) = -I, \quad \varphi(A) = -A, \quad \varphi(E_2 + E_3) = E_2 + E_3, \quad \varphi(E_1 - E_4) = E_1 - E_4.$$

On a déjà vu que la famille (I, A) est libre, par conséquent elle forme une base du sous–espace propre associé à la valeur propre -1, en particulier ce sous–espace propre est $\mathcal{C}$. Les matrices $E_2 + E_3$ et $E_1 - E_4$ étant non colinéaires, elles forment une base du sous–espace propre associé à la valeur propre 1.

Exercice n°3 - EDHEC 2015

1. (a) Pour tout $t \in [0;x]$, on a $t^2 \leqslant x^2$, donc $1-t^2 \geqslant 1-x^2$. Or, on a également $1-x^2 > 0$ (car $0 < x < 1$, qui implique $x^2 < 1$). Donc $1-t^2 \geqslant 1-x^2 > 0$. Par conséquent, on peut passer à l'inverse et on obtient : $0 < \dfrac{1}{1-t^2} \leqslant \dfrac{1}{1-x^2}$, ce qui donne, en multipliant par t^m (qui est positif ou nul) : $0 \leqslant \dfrac{t^m}{1-t^2} \leqslant \dfrac{t^m}{1-x^2}$.
On intègre cet encadrement sur l'intervalle $[0;x]$:

$$\int_0^x 0dt \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-x^2}dt$$

C'est-à-dire :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \frac{1}{1-x^2}\int_0^x t^m dt$$

Or, $\displaystyle\int_0^x t^m dt = \left[\frac{t^{m+1}}{m+1}\right]_0^x = \frac{x^{m+1}}{m+1}$. On en déduit :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

Et donc, comme $x \leqslant 1$:

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}}$$

(b) On a sans difficulté : $\dfrac{1}{1-x^2} \times \dfrac{1}{m+1} \underset{m}{\longrightarrow} +\infty 0$. On en déduit, par encadrement :

$$\boxed{\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \underset{m}{\longrightarrow} +\infty 0}$$

2. (a) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a $t^{2j} = (t^2)^j$. On reconnaît donc la somme des k premiers termes d'une suite géométrique de raison t^2, avec $t^2 \neq 1$. D'où :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} = \frac{1-(t^2)^k}{1-t^2} = \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}}$$

(b) On intègre l'égalité ci-dessus sur l'intervalle $[0;x]$:

$$\int_0^x \sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}dt = \int_0^x \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}dt$$

C'est-à-dire, par linéarité de l'intégrale :

$$\sum_{j=0}^{k-1} \int_0^x t^{2j}dt = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt$$

Or, $\displaystyle\int_0^x t^{2j}dt = \left[\frac{t^{2j+1}}{2j+1}\right]_0^x = \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$. Donc finalement :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt}$$

(c) D'après la question 1.(b) : $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt \underset{k}{\longrightarrow} +\infty 0$. Par conséquent :

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} \underset{k}{\longrightarrow} +\infty \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt$$

Conclusion : la série de terme général $\dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et on a :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt}$$

(d) Soit $k \in \mathbb{N}$ quelconque. Alors :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$

C'est-à-dire, d'après les questions 2.(b) et 2.(c) :

$$\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$

Les $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt$ se simplifient de chaque côté, et on en déduit :

$$\boxed{\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt}$$

Partie II

1. La variable aléatoire N représente le temps d'attente du premier succès (obtenir pile) à une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes (les lancers de pièce), chacune ayant une probabilité de succès égale à p.
   Par conséquent, $\boxed{N \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p}$.

2. (a) La commande `floor` renvoie la partie entière d'un nombre. Il faut donc montrer que $2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ est égal à m si et seulement si m est pair. Pour cela, on fait une disjonction de cas :

   - Si m est pair, alors il existe un entier naturel k tel que $m = 2k$. Ceci implique $\frac{m}{2} = k$, et donc $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = k$ également. Par conséquent, $2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = 2k = m$.
   - Si m est impair, alors il existe un entier naturel k tel que $m = 2k-1$. Ceci implique $\frac{m}{2} = k - \frac{1}{2}$, et donc $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = k-1$. Par conséquent, $2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = 2k-2 = m-1 \neq m$.

   Ainsi, on a montré que $2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = m$ si et seulement si m est pair.

   Conclusion : la commande `2*floor(m/2)` renvoie donc la valeur de m si et seulement si m est pair.

(b)

```
p=float(input ('donner la valeur de p'))
N=rd.geometric(p)
X=rd.randint(1,N+1)

if 2*np.floor(X/2)==X :
        print('le joueur a perdu')
else:
        print('le joueur a gagné')
```

3. (a) Si $k \geqslant j$, alors $2k+1 > 2j$. Il est donc impossible de tirer une boule numérotée $2k+1$ dans une urne qui ne contient que des boules numérotées de 1 à $2j$. Par conséquent : $\boxed{P_{(N=2j)}(X = 2k+1) = 0 \text{ si } k \geqslant j}$.

   (b) De même, si $k \geqslant j+1$, alors $k > j$ et donc $2k+1 > 2j+1$. Par conséquent, il est impossible de tirer une boule numérotée $2k+1$ dans une urne qui ne contient que des boules numérotées de 1 à $2j+1$. On en déduit que $\boxed{P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1) = 0 \text{ si } k \geqslant j+1}$.

   (c) Si k appartient à $[\![0; j-1]\!]$, alors $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j-1$ et donc, en particulier : $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j$. De plus, une fois l'urne remplie avec les boules numérotées de 1 à $2j$, chaque boule a la même probabilité d'être tirée. Par conséquent : $\boxed{P_{(N=2j)}(X = 2k+1) = \dfrac{1}{2j} \text{ si } k \leqslant j-1}$.

   (d) De même, si k appartient à $[\![0; j]\!]$, alors $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j+1$. En remplissant l'urne avec des boules numérotées de 1 à $2j+1$, la boule numérotée $2k+1$ peut donc être tirée. Et comme il y a équiprobabilité : $\boxed{P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1) = \dfrac{1}{2j+1} \text{ si } k \leqslant j}$.

4. (a) Comme N suit une loi géométrique, on a $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Donc $\Big([N = n]\Big)_{n \geqslant 1}$ est un système complet d'événements. Par conséquent, d'après la formule des probabilités totales, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{P(X = 2k+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) P_{(N=n)}(X = 2k+1)}$$

   Maintenant, on sépare la somme en deux (comme indiqué dans l'énoncé) entre, d'un côté les n pairs (qui s'écrivent sous la forme $2j$) et d'un autre côté les termes impairs (qui s'écrivent sous la forme $2j+1$) :

$$\begin{aligned} P(X = 2k+1) = &\sum_{j=1}^{+\infty} P(N = 2j) P_{(N=2j)}(X = 2k+1) \\ &+ \sum_{j=1}^{+\infty} P(N = 2j+1) P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1) \end{aligned}$$

On remplace $P(N=2j)$ et $P(N=2j+1)$ en se servant de la loi de N :

$$\begin{aligned}
P(X=2k+1) &= \sum_{j=1}^{+\infty} pq^{2j-1} P_{(N=2j)}(X=2k+1) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{+\infty} pq^{2j} P_{(N=2j+1)}(X=2k+1) \\
&= \frac{p}{q} \sum_{j=1}^{+\infty} q^{2j} P_{(N=2j)}(X=2k+1) \\
&\quad + \frac{p}{q} \sum_{j=1}^{+\infty} q^{2j+1} P_{(N=2j+1)}(X=2k+1)
\end{aligned}$$

Enfin, on remplace $P_{(N=2j)}(X=2k+1)$ et $P_{(N=2j+1)}(X=2k+1)$ en se servant de la question 3 :

$$\begin{aligned}
P(X=2k+1) &= \frac{p}{q} \sum_{j=k+1}^{+\infty} q^{2j} P_{(N=2j)}(X=2k+1) \\
&\quad + \frac{p}{q} \sum_{j=k}^{+\infty} q^{2j+1} P_{(N=2j+1)}(X=2k+1) \quad \text{(questions 3.a et 3.b)} \\
&= \frac{p}{q} \sum_{j=k+1}^{+\infty} q^{2j} \frac{1}{2j} \\
&\quad + \frac{p}{q} \sum_{j=k}^{+\infty} q^{2j+1} \frac{1}{2j+1} \quad \text{(questions 3.c et 3.d)}
\end{aligned}$$

D'où, en mettant $\dfrac{p}{q}$ en facteur :

$$\boxed{P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1} \right)}$$

(b) D'après la question I.2.d et la partie admise juste après, on a (en remplaçant dans l'égalité ci-dessus) :

$$P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}dt + \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt \right)$$

(on peut bien remplacer x par q car q appartient à $[0;1[$).
On simplifie :

$$\begin{aligned}
P(X=2k+1) &= \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}dt + \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt \right) \\
&= \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{2k+1}+t^{2k}}{1-t^2}dt \quad \text{(linéarité de l'intégrale)} \\
&= \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{2k}(t+1)}{(1-t)(1+t)}dt
\end{aligned}$$

Ce qui donne bien (en simplifiant par $t+1$) :

$$\boxed{P(X=2k+1) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt}$$

5. (a) Pour tout $t \in [0;q]$, on a $t \leqslant q < 1$, donc $1-t \geqslant 1-q > 0$, et donc, en prenant l'inverse :

$$0 < \frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-q}$$

D'où, en multipliant par $\dfrac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}$ (qui est positif ou nul car $t \geqslant 0$, $1-t \geqslant 0$ et $1+t \geqslant 0$) :

$$0 \leqslant \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} \leqslant \frac{1}{1-q} \times \frac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}$$

On intègre cet encadrement sur l'intervalle $[0;q]$:

$$0 \leqslant \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt \leqslant \frac{1}{1-q}\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}dt$$

Or, on sait que $\displaystyle\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}dt \underset{n}{\longrightarrow} +\infty 0$ (question I.1.b). On en déduit, par encadrement :

$$\boxed{\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt \underset{n}{\longrightarrow} +\infty 0}$$

(b) On fait la somme en se servant du résultat de la question 4.(b) :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt\right)\\ &= \frac{p}{q}\int_0^q \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^{2k}}{1-t}\right)dt \quad \text{(linéarité de l'intégrale)}\\ &= \frac{p}{q}\int_0^q \left(\frac{1}{1-t}\sum_{k=0}^{n} t^{2k}\right)dt\end{aligned}$$

On reconnaît (à l'intérieur de l'intégrale) la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison t^2 (avec $t^2 \neq 1$). Donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1) &= \frac{p}{q}\int_0^q \left(\frac{1}{1-t}\times\frac{1-(t^2)^{n+1}}{1-t^2}\right)dt\\ &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1-t^{2n+2}}{(1-t)(1-t^2)}dt\\ &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1-t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\end{aligned}$$

Ce qui donne bien, par linéarité de l'intégrale :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right)}$$

(c) L'événement A est l'événement « X est impair ». On a donc $A = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n est l'événement « X est impair et $X \leqslant 2n+1$ ». De plus, $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une famille croissante d'événements. Par conséquent : $P(A) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_n)$ n'est autre que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1)$, c'est-à-dire, d'après la question précédente :

$$P(A_n) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right)$$

On a donc :

$$P(A) = \lim_{n\to+\infty} \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right)$$

C'est-à-dire, d'après la question 5.(a) :

$$\boxed{P(A) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt}$$

6. (a) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Alors, pour tout $t\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{a}{1-t}+\frac{b}{1+t}+\frac{c}{(1-t)^2} &= \frac{a(1-t)(1+t)+b(1-t)^2+c(1+t)}{(1-t)^2(1+t)}\\ &= \frac{a(1-t^2)+b(1-2t+t^2)+c(1+t)}{(1-t)^2(1+t)}\\ &= \frac{(-a+b)t^2+(-2b+c)t+(a+b+c)}{(1-t)^2(1+t)}\end{aligned}$$

Par identification des coefficients, ceci est égal à $\dfrac{1}{(1-t)^2(1+t)}$ pour tout $t\in\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ si $\begin{cases}-a+b &= 0\\ -2b+c &= 0\\ a+b+c &= 1\end{cases}$

On résout ce système :

$$\begin{cases}-a+b &= 0\\ -2b+c &= 0\\ a+b+c &= 1\end{cases} \iff \begin{cases}a &= b\\ c &= 2b\\ a+b+c &= 1\end{cases} \iff \begin{cases}a &= b\\ c &= 2b\\ 4b &= 1\end{cases} \iff \begin{cases}a &= 1/4\\ c &= 1/2\\ b &= 1/4\end{cases}$$

Conclusion : pour tout $t\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, on a :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t}+\frac{b}{1+t}+\frac{c}{(1-t)^2}$$

avec $a=\dfrac{1}{4}$, $b=\dfrac{1}{4}$ et $c=\dfrac{1}{2}$.

(b) On reprend le résultat de la question 5.(c) et on calcule l'intégrale en se servant de la question précédente :

$$\begin{aligned}P(A) &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt\\ &= \frac{p}{q}\left(\frac{1}{4}\int_0^q \frac{1}{1-t}dt+\frac{1}{4}\int_0^q \frac{1}{1+t}dt+\frac{1}{2}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2}dt\right)\\ &= \frac{p}{q}\left(\frac{1}{4}\Big[-\ln(1-t)\Big]_0^q+\frac{1}{4}\Big[\ln(1+t)\Big]_0^q+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-t}\right]_0^q\right)\\ &= \frac{p}{q}\left(\frac{-1}{4}\ln(1-q)+\frac{1}{4}\ln(1+q)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-q}-1\right)\right)\\ &= \frac{1-q}{q}\left(\frac{-1}{4}\ln(1-q)+\frac{1}{4}\ln(1+q)+\frac{1}{2}\left(\frac{q}{1-q}\right)\right)\\ &= \frac{1-q}{q}\left(\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{q}{1-q}\right)\right)\end{aligned}$$

Ce qui donne, en développant :

$$\boxed{P(A) = \frac{1-q}{4q} \ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \frac{1}{2}}$$

(c) On a $0 < 1-q < 1+q$ (car $q \in]0;1[$). On en déduit que $\dfrac{1+q}{1-q} > 1$, et donc $\ln\left(\dfrac{1+q}{1-q}\right) > 0$. De plus, $\dfrac{1-q}{4q} > 0$ car $1-q > 0$ et $4q > 0$. Donc $\dfrac{1-q}{4q} \ln\left(\dfrac{1+q}{1-q}\right) > 0$.
On en déduit, avec l'expression obtenue à la question précédente :

$$\boxed{P(A) > \frac{1}{2}}$$