

Option Économique

MATHÉMATIQUES

15 Septembre 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Les questions précédées de (*) sont destinées aux cubes.

Dans tout ce sujet on supposera les commandes Python suivantes exécutées :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

Exercice n°1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{1}{e^x + 1} + nx$.

- Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- (a) Déterminer, pour tout réel x , $f'_n(x)$ et $f''_n(x)$.
(b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer un équivalent de $f_n(x)$ en $+\infty$, puis un équivalent en $-\infty$.
En déduire les limites de $f_n(x)$ aux extrémités de son ensemble de définition ainsi que l'existence de deux asymptotes à la courbe représentative de f_n , dont on précisera les équations.
- Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion A_n et préciser l'équation de la tangente en ce point.
- Quel est le développement limité à l'ordre 2 de $f_n(x)$ au point d'inflexion ?

On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

- Expliciter les développements limités en 0 à l'ordre 3 de e^x et de $\frac{1}{1+x}$.

- En constatant que

$$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{e^x - 1}{2}\right)}$$

et en utilisant les deux développements limités précédents, obtenir le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f_n(x)$.

8. Représenter graphiquement sur un même graphique orthonormé la courbe représentative de f_1 , sa tangente au point d'inflexion et ses asymptotes.
9. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution, notée u_n .
10. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $-\frac{1}{n} < u_n < 0$. En déduire la limite de (u_n) .
11. En revenant à la définition de u_n , montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$.

Exercice n°2

On considère les matrices carrées d'ordre deux suivantes :

$$0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{C}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) ; AM = MA\}.$$

Partie A : Étude de A et de $\mathcal{C}$

1. Calculer A^2 . En déduire que A est inversible et donner son inverse.
2. (*) La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Justifier que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. a) Résoudre l'équation $AM = MA$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
b) Montrer que (I_2, A) est une base de $\mathcal{C}$.
5. Soient M et N deux matrices quelconques de $\mathcal{C}$.
a) Montrer que le produit MN appartient à $\mathcal{C}$.
b) Montrer que M et N commutent, c'est-à-dire que $MN = NM$.
6. Soit M une matrice non nulle de $\mathcal{C}$. Montrer que M est inversible et que M^{-1} appartient à $\mathcal{C}$.

Partie B : Toute équation du second degré admet une solution dans $\mathcal{C}$

On fixe un polynôme unitaire du second degré à coefficients réels :

$$P(x) = x^2 + ux + v \quad \text{avec } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

On note $\Delta = u^2 - 4v$ son discriminant.

Le but de cette partie est de montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{C}$ telle que $P(M) = 0_2$.

7. Soit $M = aI_2 + bA$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
a) Montrer : $M^2 = (a^2 - b^2)I_2 + 2abA$.
b) En déduire :

$$P(M) = 0_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + ua + v &= 0 \\ 2ab + ub &= 0 \end{cases}$$

8. Dans cette question, on montre que le système ci-dessus admet au moins une solution $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ en distinguant deux cas :
a) Si $\Delta \geq 0$, montrer que le système admet au moins une solution de la forme $(a, 0)$.
b) Si $\Delta < 0$, montrer que le système admet au moins une solution (a, b) avec $b \neq 0$.
9. En vous aidant de la question précédente, donner une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M + I_2 = 0_2$.

Partie C : Un endomorphisme bijectif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère l'application $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = AMA.$$

On note (E_1, E_2, E_3, E_4) la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
11. Calculer $\varphi \circ \varphi$. En déduire que l'endomorphisme φ est bijectif, et donner φ^{-1} .
12. a) Calculer $\varphi(E_1), \dots, \varphi(E_4)$, puis donner la matrice B de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
b) (*) Justifier sans calcul que B est diagonalisable et $\text{Sp}(B) = \{-1, 1\}$.
(On pourra remarquer que $B^2 = I_4$ où I_4 est la matrice identité d'ordre 4)
c) (*) Déterminer une base de chaque sous-espace propre de B .

Exercice n°3

Partie I

Dans cette partie, x désigne un réel de $[0, 1[$.

1. (a) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}, 0 \leq \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt \leq \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}$.

(b) En déduire que : $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt = 0$.

2. (a) Pour tout réel t de $[0, 1[$ et pour tout k élément de $\mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}$.

(b) En déduire que : $\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt$.

(c) Utiliser la question 1 pour montrer que la série de terme général $\frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et exprimer $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

(d) Conclure que : $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt$.

On admet sans démonstration que l'on a aussi : $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2} dt$.

Partie II

Un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce. Cette pièce donne pile avec la probabilité p ($0 < p < 1$) et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier pile.

Si N prend la valeur n , le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis il extrait une boule au hasard de cette urne. On dit que le joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair et on désigne par A l'événement : « le joueur gagne ». On appelle X la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule extraite de l'urne.

3. Reconnaître la loi de N .

4. (a) Montrer que, si m est un entier naturel, la commande Python 2 `*np.floor(m/2)` renvoie la valeur m si et seulement si m est pair.
- (b) Recopier et compléter le programme Python suivant pour qu'il simule N et X puis renvoient l'un des deux messages «le joueur a gagné » ou «le joueur a perdu ».

```
p=float(input ('donner la valeur de p'))
N=rd.geometric(...)
X=rd.randint(...)

if ... :
    print(...)
else:
    print(...)
```

5. (a) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à j , la valeur de $P_{(N=2j)}(X = 2k + 1)$.
- (b) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à $j + 1$, la valeur de $P_{(N=2j+1)}(X = 2k + 1)$.
- (c) Déterminer $P_{(N=2j)}(X = 2k + 1)$ lorsque k appartient à $\llbracket 0, j - 1 \rrbracket$.
- (d) Déterminer $P_{(N=2j+1)}(X = 2k + 1)$ lorsque k appartient à $\llbracket 0, j \rrbracket$.
6. (a) Justifier que $P(X = 2k + 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n)P_{(N=n)}(X = 2k + 1)$.

En admettant que l'on peut scinder la somme précédente selon la parité de n , montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = 2k + 1) = \frac{p}{q} \left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2^j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2^{j+1}} \right)$$

- (b) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = 2k + 1) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t} dt$.
7. (a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} dt = 0$.
- (b) Montrer que :

$$\sum_{k=0}^n P(X = 2k + 1) = \frac{p}{q} \left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} dt \right)$$

- (c) En déduire que : $P(A) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} dt$.
8. (a) Trouver trois constantes réelles a, b et c telles que, pour tout t différent de 1 et de -1, on ait :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}$$

- (b) Écrire $P(A)$ explicitement en fonction de q .
- (c) En déduire que $P(A) > \frac{1}{2}$.