

Correction d'exercices

. Correction de l'exercice n°3

Trouver un équivalent avec la propriété $f(x) + o(f(x)) \sim f(x)$.

1. $f(x) = \ln(1+x)$ en $+\infty$.

$$\ln(1+x) = \ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$,

$$\ln(1+x) \underset{+\infty}{=} \ln(x) + o(\ln(x)) \quad \text{donc} \quad \ln(1+x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$$

2. $g(x) = x^3 + x\sqrt{x} + 2$ en $+\infty$. On sait que $2 \underset{+\infty}{=} o(x^3)$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^3} = 0$. De même $\sqrt{x} \underset{+\infty}{=} o(x^3)$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{5/2}} = 0$. Ainsi $g(x) \underset{+\infty}{=} x^3 + o(x^3)$. Donc

$$g(x) \underset{+\infty}{\sim} x^3$$

3. $h(x) = 2x^3 - x^2\sqrt{x} + 2e^x - \ln(x)$ en $+\infty$.

Par croissances comparées :

$$x^3 \underset{+\infty}{=} o(e^x) \quad x^2\sqrt{x} = x^{5/2} \underset{+\infty}{=} o(e^x) \quad \ln(x) \underset{+\infty}{=} o(e^x)$$

Ainsi $h(x) \underset{+\infty}{=} 2e^x + o(e^x)$ donc

$$h(x) \underset{+\infty}{\sim} 2e^x$$

. Correction de l'exercice n°7

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{\ln(1+x^2)}$. Est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$?

La fonction f est définie pour tout x tel que $1+x^2 > 0$ et $\ln(1+x^2) \neq 0$, c'est à dire $1+x^2 \neq 1$. Or $1+x^2 \geq 1$ avec égalité pour $x = 0$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

On cherche à savoir si f est prolongeable par continuité en 0. On étudie sa limite.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, $\ln(1+x^2) \underset{0}{\sim} x^2$ et on a toujours $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$, donc

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{x^2} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \pm\infty$, f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

2. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \frac{\ln(x)^2}{x-1}$ est vérifier qu'elle est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_*^+$.

La fonction f est définie pour tout x tel que $x > 0$ et $x-1 \neq 0$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

On cherche à savoir si f est prolongeable par continuité en 1. On étudie sa limite. Comme $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ comme taux d'accroissement de la fonction $\ln$ en 1. Donc

$$f(x) \underset{0}{\sim} \ln(x)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) = 0$, f est prolongeable par continuité en 1 et son prolongement est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)^2}{x-1} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\} \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

3. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ et vérifier qu'elle est prolongeable par continuité sur $[-1; +\infty[$.

La fonction f est définie pour tout x tel que $1+x \geq 0$ et $x \neq 0$. La fonction f est définie sur $[-1; +\infty[\setminus\{0\}$.

On cherche à savoir si f est prolongeable par continuité en 0. On étudie sa limite.

Comme $\sqrt{1+x}-1 \underset{0}{\sim} \frac{x}{2}$, $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$. Ainsi f est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{si } x \in [-1; +\infty[\setminus\{0\} \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

4. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}$. Est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^+$?

La fonction f est définie pour tout x tel que $x \geq 0$ et $x \neq 0$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

On cherche à savoir si f est prolongeable par continuité en 0. On étudie sa limite.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$, $e^{\sqrt{x}}-1 \underset{0}{\sim} \sqrt{x}$ alors

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

. Correction de l'exercice n°17

Soit f la fonction définie sur $[-1; +\infty[\setminus\{0\}$ par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

1. Déterminer le développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 puis en déduire le développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de 0.

On sait que $\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$. En remplaçant dans l'expression de f , on trouve

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \underset{0}{=} \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) - 1 \right) = \frac{1}{2} - \frac{x}{8} + o(x)$$

2. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0?

Le développement limité trouvé à la question précédente donne

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$$

Ainsi f est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{si } x \in [-1; +\infty[\setminus\{0\} \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 .

Comme f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, elle est dérivable en 0 et sa courbe représentative admet une tangente d'équation :

$$T_0 : y = \frac{1}{2} - \frac{x}{8}$$

. Correction de l'exercice n°18

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{2x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Les fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \frac{1}{2x}$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par produit f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle y est en particulier continue et dérivable.

2. Montrer que f est continue en 0.

On sait que $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ donc $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2} = f(0)$$

Donc f est continue en 0.

3. **Sans utiliser la formule de Taylor-Young** calculer un développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de 0.

On sait également que $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. En remplaçant dans l'expression de f , on trouve

$$f(x) \underset{0}{=} \frac{1}{2x} \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \underset{0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + o(x)$$

4. Montrer que f est dérivable en 0 et calculer sa dérivée.

On vient de montrer que la fonction f admet un développement limité d'ordre 1 en 0. On en déduit que f est dérivable en 0. Une identification des coefficients donne l'expression de $f'(0)$:

$$f'(0) = -\frac{1}{4}$$