

**EXERCICE 1**

En calculant des primitives déterminer si les intégrales suivantes convergent et si oui donner leurs valeurs.

$$\begin{array}{|l|l|l|} 1. \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2} & 3. \int_1^{+\infty} te^{-t} dt & 5. \int_1^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt \\ 2. \int_1^{+\infty} \ln t dt & 4. \int_1^{+\infty} te^{-t^2} dt & 6. \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2 + t} dt \end{array}$$

**EXERCICE 2**

En calculant des primitives déterminer si les intégrales suivantes convergent et si oui donner leurs valeurs.

$$\begin{array}{|l|l|l|} 1. \int_2^3 \frac{dt}{\sqrt{3-t}} & 3. \int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt & 5. \int_0^1 \frac{e^t dt}{1-e^t} \\ 2. \int_0^1 \frac{\ln t dt}{t} \text{ (IPP)} & 4. \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} dt & 6. \int_0^{+\infty} te^{-t} dt \text{ (IPP)} \end{array}$$

**EXERCICE 3**

Comment intégrer une fraction :

1. Trouver deux constantes a et b telles que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

2. Pour chacune des intégrales suivantes dire si elle converge ou non, dans le cas convergent, donner la valeur de l'intégrale.

$$(a) \int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)} \quad | \quad (b) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)} \quad | \quad (c) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x(x+1)}$$

**EXERCICE 4**

À quelle condition sur le réel α , l'intégrale suivante est elle convergente, faire la démonstration.

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\alpha x) dx$$

**EXERCICE 5**

Prouver la convergence des intégrales suivantes et calculer leur valeur.

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-|t-1|} dt \quad | \quad 2. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-a|} dt \text{ où } a \text{ est une constante.}$$

**EXERCICE 6**

Les intégrales suivantes sont elles convergentes ?

$$\begin{array}{|l|l|} 1. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}} : \text{utiliser } \leq \text{ ou } \sim & 4. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x + \sqrt{x}} : \text{utiliser } \leq \text{ ou } \sim \\ 2. \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}} : \text{utiliser } \sim & 5. \int_1^{+\infty} \frac{x\sqrt{x} + x}{x^3 + x^2 + x} dx : \text{utiliser } \sim \\ 3. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}} : \leq \text{ ou } \sim & 6. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^x - 1} \end{array}$$

**EXERCICE 7**

Les intégrales suivantes sont elles convergentes ?

$$\begin{array}{|l|l|} 1. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + e^x} & 3. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \\ 2. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^3 + 1}} & 4. \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{e^x - 1} \end{array}$$

**EXERCICE 8**

- Trouver un α bien choisi tel que $\frac{\ln x}{x^2} = o(\frac{1}{x^\alpha})$ et tel que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge.
- En déduire que la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$.
- Appliquer la même méthode à $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x}} dx$.
- En utilisant une négligeabilité devant $e^{-\alpha x}$ avec α bien choisi, montrer la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{x^4}{e^{\frac{x}{100}}} dx$

**EXERCICE 9**

Étudier la nature des intégrales suivantes

$$1. \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(x) \, dx \quad \left| \quad 2. \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \, dx}{e^x - 1} \right.$$

**EXERCICE 10**

Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

$$\left. \begin{array}{l} 1. \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^3}\right) \, dx \\ 2. \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)+x} \, dx \\ 3. \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)(1+x)} \, dx \end{array} \right| \begin{array}{l} 4. \int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{t}} \, dt \\ 5. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-e^{-t}}} \, dx \end{array}$$

**EXERCICE 11**

Calculer, si elles convergent, les intégrales suivantes

$$\left. \begin{array}{l} 1. \int_0^1 \ln(x) \, dx \\ 2. \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^2} \, dt \\ 3. \int_0^1 \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} \, dx \end{array} \right| \begin{array}{l} 4. \int_0^1 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \, dt \\ 5. \int_1^{+\infty} \frac{1}{3^t} \, dt \\ 6. \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} \, dt \end{array}$$

**EXERCICE 12**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose si l'intégrale converge

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{t^2} \, dt$$

1. Calculer I_0 .

2. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $\frac{(\ln t)^n}{t^2} = o\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right)$.

3. En déduire que les intégrales sont convergentes.

4. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que pour $n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+1} = (n+1)I_n$$

5. En déduire une expression de I_n en fonction de n .

6. Trouver la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

**EXERCICE 13**

On cherche à déterminer si l'intégrale suivante converge

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)(2+x)(3+x)}$$

1. Trouver un équivalent simple de la fonction en $+\infty$.

2. En déduire que l'intégrale converge.

3. Trouver trois constantes a , b et c telles que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$\frac{1}{(1+x)(2+x)(3+x)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3}$$

4. En déduire la valeur de l'intégrale

**EXERCICE 14**

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} \, dt$ converge, puis, avec le changement de variables $u = 1/t$,

$$\text{que } \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} \, dt = 0.$$

2. Soit $a > 0$. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2 + t^2} \, dt$.

**EXERCICE 15**

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$, la fonction f_n par

$$f_n(x) = x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente, où $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$.

2. On admet que $I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Calculer I_1 .

3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = (n+1)I_n$$

4. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n!}$$



EXERCICE 16

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} dx$.

1. Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.

2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, l'intégrale I_n est convergente.

3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)I_n$.

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!$.



EXERCICE 17

Étudier la convergence des intégrales suivantes

1. $\int_0^{+\infty} \left(x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x + 1} \right) dx$

2. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(x) dx$

3. $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^3 + 1}}$



EXERCICE 18

Étudiez la convergence des intégrales suivantes en fonction du ou des paramètres :

1. $\int_1^{+\infty} \frac{x^m}{x^2 + 1} dx$ où $m \in \mathbb{R}$ 2. $\int_1^{+\infty} x^\alpha \ln(1+x^\beta) dx$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$



EXERCICE 19

On pose

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ \frac{x-1}{\ln x} & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue.

2. $\int_0^1 f(t) dt$ est elle convergente ?

3. Soit $x \in]0, 1[$. En posant $u = t^2$, montrer que $\int_0^x \frac{t dt}{\ln t} = \int_0^{x^2} \frac{du}{\ln u}$.

4. En déduire que $\int_0^x f(t) dt = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$

5. Montrer que pour tout $t \in [x^2; x]$, on a

$$\frac{x}{t \ln t} \leq \frac{t}{t \ln t} \leq \frac{x^2}{t \ln t}$$

6. En déduire que

$$x^2 \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \leq x \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t}$$

7. Trouver une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$

8. En utilisant le théorème des gendarmes montrer que

$$\int_0^1 f(t) dt = \ln 2$$



EXERCICE 20

Soient $0 < a < b$.

1. Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$.

2. Soient $0 < x < y$. Démontrer que

$$\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

3. Démontrer que, pour tout réel $z > 0$,

$$e^{-bz} \ln \frac{b}{a} \leq \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq e^{-az} \ln \frac{b}{a}.$$

En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln \frac{b}{a}$$



EXERCICE 21

1. Démontrer la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^{3/4}} dx$. On pourra comparer avec $\frac{1}{x^\alpha}$ pour α bien choisi.

2. Donner un équivalent simple au voisinage de 0 de

$$\ln(x + \sqrt{x}) - \ln(x)$$

3. En déduire la convergence de $\int_0^1 \frac{\ln(x + \sqrt{x}) - \ln(x)}{x^{3/4}} dx$.

4. Donner un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de $\ln(x + \sqrt{x}) - \ln(x)$. En déduire la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x}) - \ln(x)}{x^{3/4}} dx$.



EXERCICE 22

Après en avoir justifié l'existence, calculer par récurrence la valeur de $I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx$.