

Exercice 1

1. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On fait un pivot de Gauss sur la matrice $A - \lambda I$:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 7-\lambda & 5 & 1 \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ 6 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} &\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ 7-\lambda & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow[L_3 \leftarrow 6L_3 - (7-\lambda)L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 23+\lambda & -15+10\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_3} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 21 & -16+11\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 23+\lambda & -15+10\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{L_3 \leftarrow 21L_3 - (23+\lambda)L_2} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 21 & -16+11\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 53-27\lambda-9\lambda^2+\lambda^3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

On s'est ramené à une matrice triangulaire supérieure. Elle est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls, c'est-à-dire si et seulement si $53 - 27\lambda - 9\lambda^2 + \lambda^3 \neq 0$.

Par conséquent, les valeurs propres de A sont les solutions de l'équation $\lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0$.

- (b) La fonction f est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel $f'(x) = 3x^2 - 18x - 27 = 3(x^2 - 6x - 9)$.

Or, le trinôme $X^2 - 6X - 9$ a pour discriminant 72. Il a donc 2 racines réelles qui sont $\frac{6 - \sqrt{72}}{2}$ et $\frac{3 + \sqrt{72}}{2}$, i.e $3 - 3\sqrt{2}$ et $3 + 3\sqrt{2}$.

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$3-3\sqrt{2}$	$3+3\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ M m $\nwarrow$ $+\infty$				

(Les limites proviennent du fait que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^3$ et $f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} x^3$)

- (c) On a directement $f(0) = 53$ et $f(3) = -82$.

Ensuite, puisque $3 - 3\sqrt{2} \leq 0 \leq 3 \leq 3 + 3\sqrt{2}$ et que la fonction f est décroissante sur $[3 - 3\sqrt{2}; 3 + 3\sqrt{2}]$ (cf question précédente), on a :

$$f(3 - 3\sqrt{2}) \geq f(0) \geq f(3) \geq f(3 + 3\sqrt{2})$$

C'est-à-dire :

$$M \geq 53 \geq -82 \geq m$$

On en déduit en particulier : $M > 0$ et $m < 0$.

- (d) D'après la question 1.(b), la fonction f est continue et strictement croissante sur $] -\infty; 3 - 3\sqrt{2}[$. D'après le théorème de la bijection, f réalise donc une bijection de $] -\infty; 3 - 3\sqrt{2}[$ sur $] -\infty; M[$. Or, 0 appartient à $] -\infty; M[$ (d'après la question précédente). Donc il existe un unique $\lambda_1 \in] -\infty; 3 - 3\sqrt{2}[$ tel que $f(\lambda_1) = 0$. De même, étant donné que f est continue et strictement décroissante sur $[3 - 3\sqrt{2}; 3 + 3\sqrt{2}]$ et que $0 \in [m; M]$, il existe un unique $\lambda_2 \in [3 - 3\sqrt{2}; 3 + 3\sqrt{2}]$ tel que $f(\lambda_2) = 0$.

Enfin, toujours de la même manière, comme f est continue et strictement croissante sur $]3 + 3\sqrt{2}; +\infty[$ et que $0 \in]m; +\infty[$, il existe un unique $\lambda_3 \in]3 + 3\sqrt{2}; +\infty[$ tel que $f(\lambda_3) = 0$.

Par conséquent, l'équation $f(x) = 0$ a exactement 3 solutions sur $\mathbb{R}$ qui sont λ_1, λ_2 et λ_3 .

D'après la question 1.(a), on en déduit que A admet 3 valeurs propres distinctes qui sont λ_1, λ_2 et λ_3 , avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

- (e) La matrice A est une matrice d'ordre 3, qui admet 3 valeurs propres distinctes. Donc elle est diagonalisable. Et comme ses valeurs propres sont λ_1, λ_2 et λ_3 , on en déduit le résultat :

Il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

2. (a) Soit $N = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On cherche à quelle condition N commute avec D :

$$\begin{aligned} ND = DN &\iff \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{1,1} & \lambda_2 a_{1,2} & \lambda_3 a_{1,3} \\ \lambda_1 a_{2,1} & \lambda_2 a_{2,2} & \lambda_3 a_{2,3} \\ \lambda_1 a_{3,1} & \lambda_2 a_{3,2} & \lambda_3 a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{1,1} & \lambda_1 a_{1,2} & \lambda_1 a_{1,3} \\ \lambda_2 a_{2,1} & \lambda_2 a_{2,2} & \lambda_2 a_{2,3} \\ \lambda_3 a_{3,1} & \lambda_3 a_{3,2} & \lambda_3 a_{3,3} \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 a_{1,1} = \lambda_1 a_{1,1} \\ \lambda_1 a_{2,1} = \lambda_2 a_{2,1} \\ \lambda_1 a_{3,1} = \lambda_3 a_{3,1} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \lambda_2 a_{1,2} = \lambda_1 a_{1,2} \\ \lambda_2 a_{2,2} = \lambda_2 a_{2,2} \\ \lambda_2 a_{3,2} = \lambda_3 a_{3,2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \lambda_3 a_{1,3} = \lambda_1 a_{1,3} \\ \lambda_3 a_{2,3} = \lambda_2 a_{2,3} \\ \lambda_3 a_{3,3} = \lambda_3 a_{3,3} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a_{2,1} = 0 \\ a_{3,1} = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a_{1,2} = 0 \\ a_{3,2} = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a_{1,3} = 0 \\ a_{2,3} = 0 \end{cases} \\ &\quad (\text{car } \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \neq \lambda_3 \text{ et } \lambda_2 \neq \lambda_3) \\ &\iff N \text{ est diagonale} \end{aligned}$$

Conclusion : Les matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales.

- (b) On procède par équivalences successives :

$$\begin{aligned} M \in E &\iff AM = MA \\ &\iff PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \\ &\iff DP^{-1}M = P^{-1}MPDP^{-1} \quad (\text{on multiplie à gauche par } P^{-1}) \\ &\iff DP^{-1}MP = P^{-1}MPD \quad (\text{on multiplie à droite par } P) \end{aligned}$$

On a donc bien l'équivalence :

$$M \in E \iff P^{-1}MP \text{ commute avec } D$$

(c) On reprend les équivalences ci-dessus :

$$\begin{aligned}
M \in E &\iff P^{-1}MP \text{ commute avec } D \\
&\iff P^{-1}MP \text{ est diagonale (d'après la question 2.a)} \\
&\iff \text{Il existe } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \\
&\iff \text{Il existe } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } M = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} P^{-1} \\
&\iff \text{Il existe } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que :} \\
M &= P \left[\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] P^{-1} \\
&\iff \text{Il existe } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que :} \\
M &= \alpha P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + \beta P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + \gamma P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}
\end{aligned}$$

Ce qui prouve le résultat suivant :

L'ensemble E est l'ensemble des combinaisons linéaires des 3 matrices

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \quad , \quad P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \quad , \quad P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(d) En notant E_1, E_2 et E_3 les trois matrices ci-dessus, on a donc $E = \text{Vect}(E_1, E_2, E_3)$.

Par conséquent, E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Montrons que la famille (E_1, E_2, E_3) est libre. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha E_1 + \beta E_2 + \gamma E_3 = 0$. Alors :

$$\alpha P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + \beta P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + \gamma P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = 0$$

C'est-à-dire :

$$P \left[\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] P^{-1} = 0$$

Ou encore :

$$P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} P^{-1} = 0$$

Par conséquent, en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P , on obtient :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = 0$$

D'où on déduit $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

La famille (E_1, E_2, E_3) est donc libre. Et comme c'est une famille génératrice de E , on en déduit que c'est une base de E .

Par conséquent, $\dim(E) = 3$.

(e) Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un polynôme annulateur non nul de A (qu'on notera Q), de degré inférieur ou égal à 2. Comme Q est un polynôme annulateur de A , toute valeur propre de A doit être racine de Q . Donc Q admet au moins 3 racines distinctes (à savoir λ_1, λ_2 et λ_3), ce qui est absurde car un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à 2 possède au maximum 2 racines.

Conclusion : Il n'existe pas de polynôme annulateur non nul de A de degré inférieur ou égal à 2.

Ceci prouve que la famille (I, A, A^2) est libre. En effet, soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned}\alpha I + \beta A + \gamma A^2 = 0 &\iff \alpha + \beta X + \gamma X^2 \text{ est un polynôme annulateur de } A \\ &\text{de degré inférieur ou égal à 2} \\ &\iff \alpha = \beta = \gamma = 0 \quad \text{d'après ce qui précède}\end{aligned}$$

La famille (I, A, A^2) est donc une famille d'éléments de E (I , A et A^2 commutent avec A), qui est libre, et qui constituée de 3 éléments, 3 étant aussi la dimension de E .

On en déduit que (I, A, A^2) est une base de E .

Exercice 2

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (car $1+t^2 > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$). Donc, en particulier, quel que soit x réel, elle est définie et continue sur $[x; 2x]$ (ou $[2x; x]$ si $2x < x$).

On en déduit que l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$ est bien définie quel que soit x réel.

2. Pour tout x réel, on a $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$. On effectue alors le changement de variable affine $u = -t$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}f(-x) &= \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+(-u)^2}} (-du) \\ &= - \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du \\ &= -f(x)\end{aligned}$$

Par conséquent, f est une fonction impaire.

3. (a) La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc admet une primitive g sur $\mathbb{R}$ (qui est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puisque sa dérivée est continue). Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \\ &= \left[g(t) \right]_x^{2x} \\ &= g(2x) - g(x)\end{aligned}$$

Or, la fonction $x \mapsto g(2x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Donc, comme différence de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = g(2x) - g(x)$, avec g une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ (cf question précédente). Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 2g'(2x) - g'(x)$, i.e :

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

On étudie le signe de $f'(x)$. Pour cela, on met au même dénominateur :

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{1+4x^2}\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{4+4x^2} - \sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{1+4x^2}\sqrt{1+x^2}}$$

Le dénominateur est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Donc $f'(x)$ est du signe du numérateur. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0 \leq 1+4x^2 < 4+4x^2$. Donc, par stricte croissance de la racine carrée sur $[0; +\infty[$: $\sqrt{1+4x^2} < \sqrt{4+4x^2}$. Ce qui implique $\sqrt{4+4x^2} - \sqrt{1+4x^2} > 0$ et donc $f'(x) > 0$.

On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. (a) Pour tout $t > 0$, on a :

$$0 < t^2 \leq t^2 + 1 \leq t^2 + 2t + 1$$

Donc, en prenant la racine carrée :

$$0 < t \leq \sqrt{t^2 + 1} \leq t + 1$$

Puis l'inverse :

$$\frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leq \frac{1}{t}$$

Maintenant, soit $x > 0$ quelconque. Alors $0 < x < 2x$. Donc on peut intégrer l'encadrement ci-dessus sur l'intervalle $[x; 2x]$:

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t+1} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$$

C'est-à-dire :

$$\left[\ln(t+1) \right]_x^{2x} \leq f(x) \leq \left[\ln(t) \right]_x^{2x}$$

Et comme $\left[\ln(t+1) \right]_x^{2x} = \ln(2x+1) - \ln(x+1)$ et $\left[\ln(t) \right]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln(2)$, on en déduit :

$$\boxed{\ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq f(x) \leq \ln(2)}$$

- (b) Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \ln(2x+1) - \ln(x+1) &= (\ln(x) + \ln(2 + \frac{1}{x})) - (\ln(x) + \ln(1 + \frac{1}{x})) \\ &= \ln(2 + \frac{1}{x}) - \ln(1 + \frac{1}{x}) \end{aligned}$$

On en déduit que $\ln(2x+1) - \ln(x+1) \xrightarrow{x} +\infty \ln(2) - \ln(1)$ (car $\frac{1}{x} \xrightarrow{x} +\infty 0$), c'est-à-dire : $\ln(2x+1) - \ln(x+1) \xrightarrow{x} +\infty \ln(2)$.

D'après la question précédente, on en déduit, par encadrement :

$$\boxed{f(x) \xrightarrow{x} +\infty \ln(2)}$$

- (c) Comme la fonction f est impaire et vérifie $f(x) \xrightarrow{x} +\infty \ln(2)$, on a également $f(x) \xrightarrow{x} -\infty -\ln(2)$. On en déduit (avec la question 3.b) le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\ln(2)$	$\ln(2)$

- (d) La fonction f est continue (car de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}$ et est strictement croissante. Donc, d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$, i.e de $\mathbb{R}$ sur $]-\ln(2); \ln(2)[$. Or, 0 appartient à $]-\ln(2); \ln(2)[$. Par conséquent, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, on a immédiatement $f(0) = 0$ (intégrale sur un intervalle réduit à un point).

Conclusion : L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle qui est $x = 0$.

5. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque.

- Si $x \geq 0$, alors on a immédiatement $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$ car $x \geq 0$ et $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1 > 0$.
- Si $x < 0$, alors $0 < x^2 < x^2 + 1$. Donc, en prenant la racine carrée : $\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2 + 1}$, c'est-à-dire (puisque $x < 0$) : $-x < \sqrt{x^2 + 1}$. On en déduit que $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.

Donc, dans tous les cas, on a bien $\boxed{x + \sqrt{x^2 + 1} > 0 \text{ quel que soit } x \text{ réel}}.$

- (b) La fonction h est bien définie sur $\mathbb{R}$ (d'après la question précédente), et elle y est dérivable (par opérations sur les fonctions dérivables). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a (d'après la formule $(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$):

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

Les $x + \sqrt{x^2+1}$ se simplifient et il reste :

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

- (c) D'après la question précédente (et la définition de f), on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \left[h(t) \right]_x^{2x} = h(2x) - h(x)$$

C'est-à-dire, d'après l'expression de h :

$$f(x) = \ln \left(2x + \sqrt{4x^2+1} \right) - \ln \left(x + \sqrt{x^2+1} \right)$$

6. (a) Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} x - f(x) &= \int_x^{2x} 1 \, dt - \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \, dt \\ &= \int_x^{2x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \right) \, dt \\ &= \int_x^{2x} \frac{\sqrt{t^2+1} - 1}{\sqrt{t^2+1}} \, dt \\ &= \int_x^{2x} \frac{(\sqrt{t^2+1} - 1)(\sqrt{t^2+1} + 1)}{\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1} + 1)} \, dt \\ &= \int_x^{2x} \frac{(t^2+1) - 1}{\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1} + 1)} \, dt \end{aligned}$$

Ce qui donne bien :

$$x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1} + 1)} \, dt$$

- (b) Soit $x > 0$ quelconque. Pour tout t réel, on a $\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1} + 1)} \geq 0$ (tous les termes qui interviennent dans la fraction sont positifs). Donc, en intégrant sur l'intervalle $[x; 2x]$ (on a bien $x \leq 2x$ car $x \geq 0$) :

$$\int_x^{2x} 0 \, dt \leq \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1} + 1)} \, dt$$

C'est-à-dire (d'après la question précédente) :

$$0 \leq x - f(x)$$

Montrons maintenant l'autre inégalité. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $t^2+1 \geq 1$ et donc $\sqrt{t^2+1} \geq 1$. Par conséquent :

$$\sqrt{t^2+1} \geq 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{t^2+1} + 1 \geq 2$$

En multipliant ces deux inégalités, on obtient alors :

$$\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1} + 1) \geq 2$$

Et on en déduit :

$$\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1}+1)} \leq \frac{t^2}{2}$$

D'où, en intégrant sur l'intervalle $[x; 2x]$:

$$\int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1}+1)} dt \leq \int_x^{2x} \frac{t^2}{2} dt$$

C'est-à-dire :

$$x - f(x) \leq \left[\frac{t^3}{6} \right]_x^{2x}$$

Ou encore :

$$x - f(x) \leq \frac{7}{6}x^3$$

Conclusion : en combinant les deux inégalités démontrées ci-dessus, on a, pour tout $x > 0$:

$$0 \leq x - f(x) \leq \frac{7}{6}x^3$$

(c) D'après l'encadrement ci-dessus, on a, pour tout $x > 0$:

$$x \leq f(x) \leq x + \frac{7}{6}x^3$$

Donc, en divisant par x (qui est strictement positif) :

$$1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1 + \frac{7}{6}x^2$$

On en déduit que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x]{x} 0^+ 1$, ce qui peut encore s'écrire :

$$f(x) \underset{0^+}{\sim} x$$

(d) Pour tout $x < 0$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{-f(-x)}{x} \quad \text{par imparité de } f \\ &= \frac{f(-x)}{-x} \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, $\frac{f(-x)}{-x} \xrightarrow[x]{-x} 0^- 1$ (car $-x$ tend vers 0 par valeurs positives quand x tend vers 0 par valeurs négatives). Donc $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x]{x} 0^- 1$, ce qui peut encore s'écrire :

$$f(x) \underset{0^-}{\sim} x$$

Et on peut éventuellement combiner les deux résultats précédents en écrivant :

$$f(x) \underset{0}{\sim} x$$

Remarque : On pouvait obtenir l'équivalent ci-dessus nettement plus facilement. En effet, par dérivabilité de la fonction f en 0, on a immédiatement le développement limité à l'ordre 1 en 0 : $f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$, c'est-à-dire (puisque $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$) : $f(x) = x + o(x)$. Et ceci implique bien $f(x) \underset{0}{\sim} x$.

Exercice 3

1. On a déjà, de manière évidente : $u_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Il reste à vérifier que la série $\sum u_k$ converge et que sa somme vaut 1. Or, la suite (u_k) est une suite géométrique de raison $\frac{\theta}{1+\theta}$ et $0 \leq \frac{\theta}{1+\theta} < 1$ (car $0 \leq \theta < \theta + 1$). On en déduit que la série $\sum u_k$ converge. De plus :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} u_k &= \frac{1}{1+\theta} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\theta}{1+\theta} \right)^k \\ &= \frac{1}{1+\theta} \times \frac{1}{1 - \frac{\theta}{1+\theta}} \\ &= \frac{1}{(1+\theta) - \theta} \\ &= 1\end{aligned}$$

Par conséquent, (u_k) définit une loi de probabilité.

2. (a) La variable aléatoire Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}P(Y = k) &= P(X + 1 = k) \\ &= P(X = k - 1) \\ &= \frac{1}{1+\theta} \left(\frac{\theta}{1+\theta} \right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{1+\theta} \left(1 - \frac{1}{1+\theta} \right)^{k-1}\end{aligned}$$

On en déduit que Y suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{1+\theta}$.

On sait alors que $E(Y) = \frac{1}{p} = 1 + \theta$. Comme $X = Y - 1$, on en déduit que X admet une espérance et que $E(X) = E(Y) - 1 = \theta$.

De même, on sait que $V(Y) = \frac{1-p}{p^2}$, c'est-à-dire :

$$V(Y) = \frac{1 - \frac{1}{1+\theta}}{\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^2} = \frac{\frac{\theta}{1+\theta}}{\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^2} = \theta(1+\theta)$$

Et comme $X = Y - 1$, on en déduit que X admet une variance et que $V(X) = V(Y) = \theta(1+\theta)$.

- (b) Comme Y suit une loi géométrique, on simule Y en simulant un temps d'attente.

Remarque : Il y a une erreur d'énoncé (sans conséquence). En effet, Y est un entier, et non un réel quelconque.

```
1 def fonction_X(theta):
2     Y=0
3     while np.rand() < 1/(1+theta):
4         Y=Y+1
5     X=Y-1
6     return(X)
```

3. (a) Comme $x_1, \dots, x_n$ sont des éléments de $X(\Omega)$, on a $P(X_k = x_k) > 0$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. D'où :

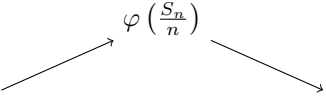
$$\begin{aligned}
 \ln(L(\theta)) &= \ln \left[\prod_{k=1}^n P(X_k = x_k) \right] \\
 &= \sum_{k=1}^n \ln \left(P(X_k = x_k) \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \ln \left[\frac{1}{1+\theta} \left(\frac{\theta}{1+\theta} \right)^{x_k} \right] \\
 &= \sum_{k=1}^n \ln \left[\frac{\theta^{x_k}}{(1+\theta)^{x_k+1}} \right] \\
 &= \sum_{k=1}^n \left[x_k \ln(\theta) - (x_k + 1) \ln(1+\theta) \right] \\
 &= \ln(\theta) \sum_{k=1}^n x_k - \ln(1+\theta) \sum_{k=1}^n (x_k + 1)
 \end{aligned}$$

C'est-à-dire : $\ln(L(\theta)) = \ln(\theta)S_n - \ln(1+\theta)(S_n + n)$.

- (b) La fonction φ est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ et, pour tout $\theta > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
 \varphi'(\theta) &= \frac{S_n}{\theta} - \frac{S_n + n}{1+\theta} \\
 &= \frac{S_n(1+\theta) - \theta(S_n + n)}{\theta(1+\theta)} \\
 &= \frac{S_n - n\theta}{\theta(1+\theta)}
 \end{aligned}$$

Or, $\theta(1+\theta) > 0$. Donc $\varphi'(\theta)$ est du signe de $S_n - n\theta$ sur $]0; +\infty[$. D'où le tableau de variations de φ :

x	0	$\frac{S_n}{n}$	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+	0	-
$\varphi(x)$			

Conclusion : La fonction φ admet un maximum sur $]0; +\infty[$, atteint en un seul réel qui est $\widehat{\theta}_n = \frac{S_n}{n}$.

Comme $L(\theta) = \exp(\varphi(\theta))$ et que la fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, la fonction L a les mêmes variations que la fonction φ sur $]0; +\infty[$.

Conclusion : La fonction L admet également un maximum sur $]0; +\infty[$, qui est également atteint (uniquement) en $\widehat{\theta}_n = \frac{S_n}{n}$.

- (c) La variable aléatoire T_n admet une espérance car $X_1, \dots, X_n$ admettent des espérances (elles ont la même

loi que X et X admet une espérance). De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
 E(T_n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X) \quad \text{car } X_1, \dots, X_n \text{ ont la même loi que } X \\
 &= \frac{1}{n} \times nE(X) \\
 &= E(X) \\
 &= \theta \quad (\text{question 2.a})
 \end{aligned}$$

On en déduit que T_n est un estimateur sans biais de θ .

- (d) Comme T_n est un estimateur sans biais, son risque quadratique est égal à sa variance : $r_{T_n}(\theta) = V(T_n)$ (sous réserve d'existence de cette variance).

Or, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ admettent des variances (elles ont la même loi que X et X admet une variance), et sont indépendantes. On en déduit que T_n admet une variance et :

$$\begin{aligned}
 V(T_n) &= V\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right] \\
 &= \frac{1}{n^2} V\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k) \quad \text{par indépendance de } X_1, \dots, X_n \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X) \quad \text{car } X_1, \dots, X_n \text{ ont la même loi que } X \\
 &= \frac{1}{n^2} \times nV(X) \\
 &= \frac{V(X)}{n} \\
 &= \frac{\theta(1+\theta)}{n} \quad (\text{question 2.a})
 \end{aligned}$$

Conclusion : $r_{T_n}(\theta) = \frac{\theta(1+\theta)}{n}$, d'où on déduit $r_{T_n}(\theta) \xrightarrow[n]{\quad} +\infty 0$.

Problème

1. (a) Posons $f(t) = \max(x, t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors $f(t) = \begin{cases} x & \text{si } t < x \\ t & \text{si } t \geq x \end{cases}$.

On en déduit que f est continue sur $] -\infty; x[$ et sur $]x; +\infty[$. De plus, $x \xrightarrow[t]{\quad} x^-x$ et $t \xrightarrow[t]{\quad} x^+x$, c'est-à-dire $f(t) \xrightarrow[t]{\quad} x^-f(x)$ et $f(t) \xrightarrow[t]{\quad} x^+f(x)$. Ce qui prouve que f est également continue en x .

Conclusion : La fonction $t \mapsto \max(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- (b) On envisage les 3 cas :

- Si $x \leq 0$, alors pour tout $t \in [0; 1]$, on a $t \geq x$, et donc $\max(x, t) = t$. D'où

$$y = \int_0^1 \max(x, t) dt = \int_0^1 t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

- Si $x \in]0; 1]$, on découpe l'intégrale en deux, suivant que $t \leq x$ ou $t > x$:

$$\begin{aligned}
 y &= \int_0^1 \max(x, t) dt \\
 &= \int_0^x \max(x, t) dt + \int_x^1 \max(x, t) dt \\
 &= \int_0^x x dt + \int_x^1 t dt \\
 &= [xt]_0^x + \left[\frac{t^2}{2} \right]_x^1 \\
 &= x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \right) \\
 &= \frac{x^2 + 1}{2}
 \end{aligned}$$

- Si $x > 1$, alors pour tout $t \in [0; 1]$, on a $t < x$, et donc $\max(x, t) = x$. D'où

$$y = \int_0^1 \max(x, t) dt = \int_0^1 x dt = [xt]_0^1 = x$$

Conclusion : $y = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2 + 1}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases} .$

2. La variable aléatoire X suit une loi géométrique, donc, pour tout $\omega \in \Omega$, on a $X(\omega) \geq 1$. Il y a donc deux cas :

- Si $X(\omega) = 1$, alors, d'après la question précédente, $Y(\omega) = \frac{X(\omega)^2 + 1}{2} = \frac{1^2 + 1}{2} = 1$, et donc $Y(\omega) = X(\omega)$.
- Si $X(\omega) > 1$, alors, d'après la question précédente, $Y(\omega) = X(\omega)$.

Donc, dans tous les cas, on a bien $Y(\omega) = X(\omega)$.

Conclusion : Si X suit une loi géométrique, alors $Y = X$.

3. (a) Comme $X(\omega) = \{-1; 0; 1\}$, on a $P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) = 1$. Par conséquent :

$$P(X = 0) = 1 - P(X = -1) - P(X = 1) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

C'est-à-dire

$P(X = 0) = \frac{1}{2}$.

(b) On envisage les 3 cas. Pour tout $\omega \in \Omega$:

- Si $X(\omega) = -1$, alors, d'après la question 1.(b), $Y(\omega) = \frac{1}{2}$.
- Si $X(\omega) = 0$, alors, d'après la question 1.(b), $Y(\omega) = \frac{1}{2}$ également.
- Si $X(\omega) = 1$, alors, d'après la question 1.(b), $Y(\omega) = \frac{X(\omega)^2 + 1}{2} = \frac{1^2 + 1}{2} = 1$.

Donc, dans tous les cas, on a $Y(\omega) = \frac{1}{2}$ ou $Y(\omega) = 1$. Par conséquent, on a bien

$Y(\Omega) = \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}$.

De plus, d'après les 3 cas ci-dessus :

$$P\left(Y = \frac{1}{2}\right) = P(X = -1) + P(X = 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Et

$$P(Y = 1) = P(X = 1) = \frac{1}{4}$$

La loi de Y est donc :

y	$\frac{1}{2}$	1
$P(Y = y)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

(c) Le programme complété est le suivant :

```

1 def fonction_y():
2     u=np.randint(1,5)
3     if u==0:
4         y=1
5     else:
6         y=1/2
7     return(y)

```

Remarque : On n'est pas obligé de mettre u=0. On peut mettre u=1 à la place (ou u=2 ou u=3). L'essentiel est de choisir une valeur dans $\{0; 1; 2; 3\}$ (elles ont toutes la même probabilité de sortir).

4. (a) La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[0; 1[$. Donc, pour tout $\omega \in \Omega$, il y a deux cas :

- Si $X(\omega) = 0$, alors, d'après la question 1.(b), $Y(\omega) = \frac{1}{2}$, et donc $Y(\omega) = \frac{X(\omega)^2 + 1}{2}$.
- Si $X(\omega) \in]0; 1[$, alors, d'après la question 1.(b), $Y(\omega) = \frac{X(\omega)^2 + 1}{2}$.

Donc, dans tous les cas, on a bien $Y(\omega) = \frac{X(\omega)^2 + 1}{2}$.

Conclusion : Si X suit une loi uniforme sur $[0; 1[$, alors $Y = \frac{X^2 + 1}{2}$.

(b) La variable aléatoire X est à valeurs dans $[0; 1[$, donc X^2 est à valeurs dans $[0; 1[$ également. Par conséquent, $X^2 + 1$ est à valeurs dans $[1; 2[$ et donc Y est à valeurs dans $\left[\frac{1}{2}; 1\right[$.

Autrement dit : $Y(\Omega) = \left[\frac{1}{2}; 1\right[$.

(c) Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right[$, on a :

$$\begin{aligned}
 F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\
 &= P\left(\frac{X^2 + 1}{2} \leq x\right) \\
 &= P(X^2 + 1 \leq 2x) \\
 &= P(X^2 \leq 2x - 1) \\
 &= P(X \leq \sqrt{2x - 1}) \quad \text{car } X \text{ est à valeurs positives}
 \end{aligned}$$

Et cette dernière probabilité est égale à $\sqrt{2x - 1}$ puisque X suit une loi uniforme sur $[0; 1[$.

Conclusion : Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right[$, on a $F_Y(x) = \sqrt{2x - 1}$.

(d) D'après les deux questions précédentes, la fonction de répartition de Y est la fonction :

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{2x - 1} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$, sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right[$ et sur $]1; +\infty[$ (soit comme fonction constante, soit par opérations sur les fonctions continues). De plus, elle est également continue en $\frac{1}{2}$ (car $F_Y(x) \xrightarrow{x} \frac{1}{2} - F_Y\left(\frac{1}{2}\right)$ et $F_Y(x) \xrightarrow{x} \frac{1}{2} + F_Y\left(\frac{1}{2}\right)$) et en 1 (car $F_Y(x) \xrightarrow{x} 1 - F_Y(1)$ et $F_Y(x) \xrightarrow{x} 1 + F_Y(1)$).

Donc F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty; \frac{1}{2}[$, sur $]\frac{1}{2}; 1[$ et sur $]1; +\infty[$ (soit comme fonction constante, soit par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$).

Par conséquent, F_Y est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}$ (qui est $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points).

On en déduit que Y est une variable aléatoire à densité.

De plus, avec l'expression de F_Y , on obtient (en dérivant) une densité de Y (qu'on appellera f_Y) :

$$f_Y : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2x-1}} & \text{si } x \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (e) Une méthode pour déterminer $E(Y)$ consisterait à calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x) dx$ (avec f_Y la fonction ci-dessus).

Mais il y a plus simple. On sait (d'après la question 4.(a)) que $Y = \frac{X^2 + 1}{2}$ avec X qui suit une loi uniforme sur $[0; 1[$ (de densité constante égale à 1 sur $[0; 1]$, et nulle ailleurs). Donc, d'après le théorème du transfert, on a, sous réserve d'absolue convergence de l'intégrale :

$$E(Y) = \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{2} \times 1 dx$$

Or, cette intégrale est bien absolument convergente (intégrale d'une fonction continue sur un segment). Donc Y admet une espérance. De plus :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

C'est-à-dire $E(Y) = \frac{2}{3}$.

- (f) D'après la question 4.(a), le programme complété est le suivant :

```
1 def fonction_y():
2     u=np.rand()
3     y=(1+u*u)/2
4     return(y)
```

5. (a) Notons g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2 + 1}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On a immédiatement $g(]-\infty; 0]) = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ et $g([1; +\infty]) =]1; +\infty]$. De plus, sur $]0; 1]$, la fonction g est continue (fonction polynomiale) et est strictement croissante (g est dérivable sur $]0; 1[$, de dérivée $g' : x \mapsto x$,

qui est strictement positive sur $]0; 1[$). Donc g réalise une bijection de $]0; 1]$ sur $\left] \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x); g(1) \right]$. On en déduit que $g([0; 1]) = \left[\frac{1}{2}; 1 \right]$.

Par conséquent, en « recollant les morceaux » :

$$g(\mathbb{R}) = \left\{ \frac{1}{2} \right\} \cup \left[\frac{1}{2}; 1 \right] \cup]1; +\infty] = \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$$

Or, $Y = g(X)$. Donc $Y(\Omega) = g(X(\Omega))$, c'est-à-dire $Y(\Omega) = g(\mathbb{R})$.

Conclusion : $Y(\Omega) = \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$

- (b) En reprenant les calculs ci-dessus qu'on a l'équivalence : $g(x) = \frac{1}{2} \iff x \leq 0$. En effet, si $x \leq 0$, on a bien $g(x) = \frac{1}{2}$, et si $x > 0$ (que x soit dans $]0; 1]$ ou dans $]1; +\infty[$), on a $g(x) > \frac{1}{2}$ et donc $g(x) \neq \frac{1}{2}$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} P\left(Y = \frac{1}{2}\right) &= P(X \leq 0) \\ &= \Phi(0) \end{aligned}$$

Et donc $P\left(Y = \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

- (c) Étant donné que $Y(\Omega) = \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$, on a immédiatement $P\left(Y < \frac{1}{2}\right) = 0$, et donc $P(Y \leq x) = 0$ pour tout $x < \frac{1}{2}$.

Autrement dit : $F_Y(x) = 0$ pour tout $x < \frac{1}{2}$.

Maintenant, soit $x \geq \frac{1}{2}$. On calcule $F_Y(x)$ en utilisant l'indication : on applique la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $([X \leq 0], [0 < X \leq 1], [X > 1])$. On obtient :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P\left((X \leq 0) \cap (Y \leq x)\right) + P\left((0 < X \leq 1) \cap (Y \leq x)\right) \\ &\quad + P\left((X > 1) \cap (Y \leq x)\right) \end{aligned}$$

On simplifie cela en envisageant deux cas :

- Si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, alors $(X \leq 0) \cap (Y \leq x) = (X \leq 0)$ (car $(X \leq 0)$ implique $(Y = \frac{1}{2})$ et donc forcément $(Y \leq x)$) et $(X > 1) \cap (Y \leq x) = \emptyset$ (car $(X > 1)$ implique $(Y > 1)$, ce qui est incompatible avec $(Y \leq x)$). D'où :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(X \leq 0) + P\left((0 < X \leq 1) \cap (Y \leq x)\right) \\ &= P(X \leq 0) + P\left((0 < X \leq 1) \cap \left(\frac{X^2 + 1}{2} \leq x\right)\right) \quad (\text{question 1.b}) \\ &= P(X \leq 0) + P\left((0 < X \leq 1) \cap (X^2 \leq 2x - 1)\right) \\ &= P(X \leq 0) + P\left((0 < X \leq 1) \cap \left(-\sqrt{2x - 1} \leq X \leq \sqrt{2x - 1}\right)\right) \\ &= P(X \leq 0) + P\left(0 < X \leq \sqrt{2x - 1}\right) \quad \text{car } \sqrt{2x - 1} \leq 1 \\ &= P(X \leq \sqrt{2x - 1}) \end{aligned}$$

Autrement dit : si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, alors $F_Y(x) = \Phi(\sqrt{2x - 1})$.

- Si $x > 1$, alors $(X \leq 0) \cap (Y \leq x) = (X \leq 0)$ (de même qu'au cas précédent) et $(0 < X \leq 1) \cap (Y \leq x) = (0 < X \leq 1)$ (car $(0 < X \leq 1)$ implique $(\frac{1}{2} < Y \leq 1)$ et donc forcément $(Y \leq x)$). D'où :

$$\begin{aligned}
 F_Y(x) &= P(X \leq 0) + P(0 < X \leq 1) + P((X > 1) \cap (Y \leq x)) \\
 &= P(X \leq 1) + P((X > 1) \cap (Y \leq x)) \\
 &= P(X \leq 1) + P((X > 1) \cap (X \leq x)) \quad (\text{question 1.b}) \\
 &= P(X \leq 1) + P(1 < X \leq x) \\
 &= P(X \leq x)
 \end{aligned}$$

Autrement dit : $\boxed{\text{si } x > 1, \text{ alors } F_Y(x) = \Phi(x)}.$

$$\boxed{\text{Conclusion : } F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \Phi(\sqrt{2x-1}) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ \Phi(x) & \text{si } x > 1 \end{cases} .}$$

- (d) On constate que $F_Y(x) \xrightarrow{x} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ (car Φ est continue et $\Phi(0) = \frac{1}{2}$) alors que $F_Y(x) \xrightarrow{x} \frac{1}{2} - 0$. Donc F_Y n'est pas continue en $\frac{1}{2}$.

On en déduit que $\boxed{Y \text{ n'est pas une variable aléatoire à densité}}.$

Autre méthode : Si Y était à densité, on aurait $P(Y = x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui contredit la réponse à la question 5.(b). Donc Y n'est pas une variable à densité.

De plus, si Y était une variable aléatoire discrète, alors sa fonction de répartition serait une fonction en escaliers et serait constante sur tout intervalle où elle est continue. Or, F_Y est continue sur $]1; +\infty[$ (car Φ l'est), mais n'y est pas constante (elle y est strictement croissante car, pour tout $x > 1$, on a $\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, qui est strictement positif).

On en déduit que $\boxed{Y \text{ n'est pas non plus une variable aléatoire discrète}}.$