

### Exercice 1

On note  $I$  la matrice  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et on considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. (a) (\*) Montrer, grâce à la méthode du pivot de Gauss, que les valeurs propres  $\lambda$  de  $A$  sont les solutions de l'équation :  $\lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0$ . (Montrer que  $A - \lambda I_3$  est inversible si et seulement si  $\lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 \neq 0$ .)
- (b) Etudier la fonction  $f$  qui, à tout réel  $x$  associe  $f(x) = x^3 - 9x^2 - 27x + 53$ , puis dresser son tableau de variation (on précisera les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ , on notera  $m$  le minimum local de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $M$  le maximum local de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et on ne cherchera ni à calculer  $m$ , ni à calculer  $M$ ).
- (c) Calculer  $f(0)$  et  $f(3)$  puis déterminer les signes de  $m$  et  $M$ .
- (d) (\*) Montrer que  $A$  admet trois valeurs propres, que l'on ne cherchera pas à calculer et que l'on notera  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  avec  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ .

(e) (\*) En déduire qu'il existe une matrice  $P$  inversible telle que  $A = PDP^{-1}$ , avec  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ .

2. L'objectif de cette question est de déterminer l'ensemble  $E$  des matrices  $M$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $A$ , c'est à dire qui vérifient :  $AM = MA$ .

- (a) Montrer que les matrices qui commutent avec  $D$  sont des matrices diagonales.
- (b) Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :
  - i.  $M$  est une matrice de  $E$
  - ii.  $P^{-1}MP$  commute avec  $D$

- (c) Etablir que toute matrice  $M$  de  $E$  est combinaison linéaire des trois matrices suivantes :

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

- (d) En déduire que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et donner sa dimension.
- (e) Montrer, en raisonnant sur les valeurs propres de  $A$ , qu'il n'existe aucun polynôme annulateur non nul de  $A$  qui soit de degré inférieur ou égal à 2. En déduire que  $(I, A, A^2)$  est une base de  $E$ .

### Exercice 2

1. Montrer que l'intégrale  $\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt$  est définie pour tout réel  $x$ . On considère désormais la fonction  $f$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt$$

2. Etablir que  $f$  est impaire.
3. (a) Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
- (b) Déterminer  $f'(x)$ , pour tout réel  $x$ , et en déduire que  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
4. (a) En utilisant la relation  $t^2 \leq t^2 + 1 \leq t^2 + 2t + 1$ , valable pour tout  $t$  réel positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \ln(2x + 1) - \ln(x + 1) \leq f(x) \leq \ln(2)$$

- (b) Donner alors la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .
- (c) Dresser le tableau de variation complet de  $f$ .
- (d) Résoudre l'équation  $f(x) = 0$ .
5. (a) Montrer que pour tout réel  $x$ , on a :  $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$ .

- (b) Déterminer la dérivée de la fonction  $h$  qui, à tout réel  $x$  associe  $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ .
- (c) En déduire l'expression explicite de  $f(x)$ .
6. Recherche d'un équivalent de  $f(x)$  lorsque  $x$  est au voisinage de 0.
- (a) Etablir que, pour tout réel  $x$  strictement positif, on a :  $x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1} (1 + \sqrt{t^2 + 1})} dt$
- (b) En déduire :
- $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq x - f(x) \leq \frac{7}{6} x^3$$
- (c) Conclure que  $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$ .
- (d) Montrer que l'on a aussi :  $f(x) \underset{0^-}{\sim} x$ .

### Exercice 3

Dans cet exercice,  $\theta$  désigne un réel strictement positif et  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ , on pose :  $u_k = \frac{1}{1 + \theta} \left( \frac{\theta}{1 + \theta} \right)^k$ .

1. Montrer que la suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  définit bien une loi de probabilité.  
On considère maintenant une variable aléatoire  $X$  prenant ses valeurs dans  $\mathbb{N}$  et dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = u_k$$

2. (a) On pose  $Y = X + 1$ . Reconnaître la loi de  $Y$ , puis en déduire l'espérance et la variance de  $X$ .  
(b) Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle simule la loi d'une variable aléatoire  $X$ .

```
1 def fonction_X(theta):
2     Y=0
3     while ...
4         Y=Y+1
5     X=
6     return(X)
```

3. Dans cette question, on souhaite estimer le paramètre  $\theta$  par la méthode du maximum de vraisemblance. Pour ce faire, on considère un échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que  $X$  et on introduit la fonction  $L$ , de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$ , définie par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*, \quad L(\theta) = \prod_{k=1}^n P(X_k = x_k)$$

où  $x_1, x_2, \dots, x_n$  désignent des entiers naturels éléments de  $X(\Omega)$ .

L'objectif est de choisir la valeur de  $\theta$  qui rend  $L(\theta)$  maximale.

- (a) Ecrire  $\ln(L(\theta))$  en fonction de  $\theta$  et de  $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ .

- (b) On considère la fonction  $\varphi$ , définie par :

$$\forall \theta \in ]0; +\infty[, \varphi(\theta) = S_n \ln \theta - (S_n + n) \ln(1 + \theta)$$

Montrer que la fonction  $\varphi$  admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera  $\hat{\theta}_n$  et que l'on exprimera en fonction de  $S_n$ . Que représente  $\hat{\theta}_n$  pour la fonction  $L$ ?

On pose dorénavant :  $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ . La variable  $T_n$  est appelée estimateur du maximum de vraisemblance pour  $\theta$ .

- (c) Vérifier que  $T_n$  est un estimateur sans biais de  $\theta$ . (Montrer que  $E(T_n) = \theta$ ).  
(d) Calculer le risque quadratique  $r_{T_n}(\theta)$  de  $T_n$  et vérifier que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_{T_n}(\theta) = 0$ .  
(Le risque quadratique est défini par  $r_{T_n}(\theta) = E((T_n - \theta)^2)$ ).

## Problème

1. Soit  $x$  un réel quelconque.

(a) Justifier que la fonction  $t \mapsto \max(t, x)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

On considère maintenant l'intégrale  $y = \int_0^1 \max(x, t) dt$ .

(b) Montrer que  $y = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2 + 1}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Dans la suite du problème, on considère une variable aléatoire  $X$  définie sur un certain espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  que l'on ne cherchera pas à déterminer.

On admet que l'on définit une variable aléatoire  $Y$ , elle aussi définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , en posant  $Y = \int_0^1 \max(X, t) dt$ , ce qui signifie que, pour tout  $\omega$  de  $\Omega$ , on a :

$$Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega), t) dt$$

On note  $F_Y$  la fonction de répartition de  $Y$ .

On se propose dans la suite de déterminer la loi de  $Y$  connaissant celle de  $X$ .

2. Vérifier que si  $X$  suit une loi géométrique alors on a :  $Y = X$ .

3. On suppose, dans cette question, que  $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$  et que l'on a :

$$P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{4}$$

(a) Déterminer la valeur de  $P(X = 0)$ .

(b) Vérifier que  $Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$  puis donner la loi de  $Y$ .

(c) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire  $Y$ .

```
1 def fonction_y():
2     if ...:
3         y=...
4     else:
5         y=...
6
7     return(y)
```

4. *Pour les cubes* On suppose, dans cette question, que  $X$  suit la loi uniforme sur  $[0; 1[$ , avec  $X(\Omega) = [0; 1[$ .

(a) Vérifier, en utilisant la première question, que l'on a :  $Y = \frac{X^2 + 1}{2}$ .

(b) En déduire que  $Y(\Omega) = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ .

(c) Montrer alors que, pour tout  $x$  de  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , on a :  $F_Y(x) = \sqrt{2x - 1}$ .

(d) Expliquer pourquoi  $Y$  est une variable à densité.

(e) Donner la valeur de  $E(Y)$ .

(f) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire  $Y$ .

```
1 def fonction_y():
2     u=...
3     y=...
4     return(y)
```

5.

6. *Pour les cubes* On suppose, dans cette question, que  $X$  suit la loi normale centrée réduite. On rappelle que  $X(\Omega) = \mathbb{R}$  et on note  $\Phi$  la fonction de répartition de  $X$ .

(a) Vérifier que  $Y(\Omega) = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ .

(b) Donner la valeur de  $P\left(Y = \frac{1}{2}\right)$ .

(c) Utiliser la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements  $([X \leq 0], [0 < X \leq 1], [X > 1])$  pour établir l'égalité suivante :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \Phi(\sqrt{2x-1}) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ \Phi(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(d) La variable aléatoire  $Y$  est-elle à densité? Est-elle discrète?