

Option Économique

MATHÉMATIQUES

06 Octobre 2025

EXERCICE

Toutes les matrices de cet exercice sont des éléments de l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On rappelle qu'un élément A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est colinéaire I s'il existe un réel λ tel que $A = \lambda I$.

On définit les deux applications suivantes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, notées d et t , par : pour tout élément $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $d(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$ et $t(A) = a_{1,1} + a_{2,2}$.

1. Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- (a) On a $2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc $d(2I) = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4$ alors que $d(I) = 1$

Donc $d(2I) \neq 2d(I)$

Conclusion : d n'est pas linéaire.

- (b) Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

$$\text{On a alors } A B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} d(A) d(B) &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\ &= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d(AB) &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \\ &\quad - (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ &= a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} + a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} + a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} \\ &\quad - [a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} + a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} + a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{22}b_{21}b_{22}] \\ &= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} \\ &= d(A) d(B) \end{aligned}$$

Conclusion : $d(AB) = d(A) d(B)$ pour toutes matrices A et B

- (c) Si A et B sont semblables, il existe P tel que $A = PBP^{-1}$

$$\text{Donc } d(A) = d(PBP^{-1}) = d(P) d(B) d(P^{-1}) = d(P) d(P^{-1}) d(B) = d(PP^{-1}B) = d(B)$$

On peut aussi remarquer que $d(PP^{-1}) = d(P) d(P^{-1})$ d'une part et $d(PP^{-1}) = d(I) = 1$.

$$\text{Donc } d(P^{-1}) = d(P)^{-1} \text{ et } d(A) = d(PBP^{-1}) = d(P) d(B) d(P^{-1}) = d(B)$$

Conclusion : si A et B sont semblables, on a : $d(A) = d(B)$.

2. (a) t est définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ donc $\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} + \beta b_{11} & \alpha a_{12} + \beta b_{12} \\ \alpha a_{21} + \beta b_{21} & \alpha a_{22} + \beta b_{22} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} t(\alpha A + \beta B) &= \alpha a_{11} + \beta b_{11} + \alpha a_{22} + \beta b_{22} \\ &= \alpha(a_{11} + a_{22}) + \beta(b_{11} + b_{22}) \\ &= \alpha t(A) + \beta t(B) \end{aligned}$$

Conclusion : t est une application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

On a $\text{Im}(t) \subset \mathbb{R}$ et elle n'est pas réduite à $\{0\}$ ($t(I) = 2$). $\text{Im}(t)$ étant un sous espace de $\mathbb{R}$ on a donc

Conclusion : $\text{Im}(t) = \mathbb{R}$ et $\dim(\text{Im}(t)) = 1$

le théorème du rang donne alors

Conclusion : $\dim(\text{Ker}(t)) = 4 - 1 = 3$

- (b) Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ et donc

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \text{ et} \\ t(AB) &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \text{ et} \\ BA &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} & a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12} \\ a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} & a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \\ t(BA) &= a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{aligned}$$

Conclusion : si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on a : $t(AB) = t(BA)$

- (c) Donc si A et B sont semblables avec $A = PBP^{-1}$ on a $t(A) = t(PBP^{-1}) = t(PP^{-1}B) = t(B)$

Conclusion : si A et B sont semblables, on a : $t(A) = t(B)$.

3. Soit A un élément donné de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non colinéaire à I .

- (a) Comme A et I sont deux matrices non colinéaires, elles forment une famille libre et α et β sont uniques.

Reste à démontrer l'existence :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ et } A^2 = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{12}(a_{11} + a_{22}) \\ a_{21}(a_{11} + a_{22}) & a_{22}^2 + a_{12}a_{21} \end{pmatrix} \text{ et } \alpha A + \beta I = \begin{pmatrix} \beta + \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \beta + \alpha a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } A^2 = \alpha A + \beta I \iff \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} = \beta + \alpha a_{11} & a_{12}(a_{11} + a_{22}) = \alpha a_{12} \\ a_{21}(a_{11} + a_{22}) = \alpha a_{21} & a_{22}^2 + a_{12}a_{21} = \beta + \alpha a_{22} \end{pmatrix}$$

ce qui est vrai si (condition suffisante) $\alpha = a_{11} + a_{22} = t(A)$ et

$$\begin{aligned} \beta &= a_{11}^2 + a_{12}a_{21} - \alpha a_{11} = a_{11}^2 + a_{12}a_{21} - a_{11}(a_{11} + a_{22}) \\ &= a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -d(A) \text{ et} \\ \beta &= a_{22}^2 + a_{12}a_{21} - \alpha a_{22} = -d(A) \end{aligned}$$

- (b) Conclusion : $\alpha = t(A)$ et $\beta = -d(A)$ sont les seules solutions de $A^2 = \alpha A + \beta I$.

4. Soit A un élément donné de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non colinéaire à I . On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont A est la matrice associée dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$. On pose : $w = e_1 + e_2$.

- (a) Si les trois sont vecteurs propres, il existe alors trois réels tels que $u(e_1) = \alpha_1 e_1$, $u(e_2) = \alpha_2 e_2$ et $u(e_1 + e_2) = \alpha_3(e_1 + e_2)$

et par linéarité : $u(e_1 + e_2) = u(e_1) + u(e_2) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$.

Donc $\alpha_3(e_1 + e_2) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ et comme la famille (e_1, e_2) est libre alors $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_2$.

Et pour tout vecteur $v = xe_1 + ye_2$ on a $u(v) = \alpha_1 v$ donc $u = \alpha_1 \text{Id}$ et $A = \alpha I$

La contraposée est alors

Conclusion : les trois vecteurs e_1, e_2 et w ne peuvent être simultanément vecteurs propres de u .

- (b) $(x, u(x))$ n'est pas une base si les deux vecteurs x et $u(x)$ sont liés.

Donc si x est vecteur propre.

Or, un des trois vecteurs e_1, e_2 et w n'est pas vecteurs propre et donc pour un de ces trois vecteurs (non nul) $(x, u(x))$ est libre donc base ($\dim \mathbb{R}^2 = 2$)

Conclusion : il existe au moins un élément non nul x de $\mathbb{R}^2$ tel que la famille $(x, u(x))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$

- (c) On a $u(x) = 0x + 1u(x)$ d'où ses coordonnées dans la base $(x, u(x))$

Et comme $A^2 = \alpha A + \beta I$. on a alors $u^2 = \alpha u + \beta \text{Id}$ et $(u(x)) = \beta x + \alpha u(x)$ donc avec $a = \beta = -d(A)$ et $b = \alpha = t(A)$ (indépendants de x)

Conclusion : la matrice de u dans la base $(x, u(x))$ est $\begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix}$

- (d) A est donc semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix}$

et ${}^t A$ n'est pas colinéaire à I non plus, ${}^t A$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -d({}^t A) \\ 1 & t({}^t A) \end{pmatrix}$

Enfin, comme $d(A) = d({}^t A)$ et $t(A) = t({}^t A)$ alors

Conclusion : A est semblable à sa transposée ${}^t A$

5. Soit A un élément donné de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble défini par $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / AB = BA\}$.

- (a) On vérifie les 3 critères :

- $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
- avec 0 la matrice nulle, $A0 = 0A$ donc $0 \in \mathcal{C}(A)$
- Si B et $B' \in \mathcal{C}(A)$ et α et β réels, $A(\alpha B + \beta B') = \alpha AB + \beta AB' = \alpha BA + \beta B'A = (\alpha B + \beta B')A$
Donc $\alpha B + \beta B' \in \mathcal{C}(A)$

Conclusion : $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- (b) Si A est colinéaire avec I alors toute matrice commute avec A et $\mathcal{C}(A) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\dim(\mathcal{C}(A)) = 4$

Si A n'est pas colinéaire avec I alors il existe P inversible telle que $A = P \begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix} P^{-1}$

Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B' = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a :

$$AB = BA \iff \begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix} B' = B' \begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c d(A) & -e d(A) \\ a + c t(A) & b + e t(A) \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & b t(A) - a d(A) \\ e & e t(A) - c d(A) \end{pmatrix} \text{ donc}$$

$$AB = BA \iff \begin{cases} b = -c d(A) & b t(A) - a d(A) = -e d(A) \\ e = a + c t(A) & e t(A) - c d(A) = b + e t(A) \end{cases}$$

$$\text{par substitution} \iff \begin{cases} b = -c d(A) & -c d(A) t(A) - a d(A) = -[a + c t(A)] d(A) \\ e = a + c t(A) & 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = -c d(A) \\ e = a + c t(A) \end{cases}$$

Donc $\mathcal{C}(A) = \left\{ P \begin{pmatrix} a & -c d(A) \\ c & a + c t(A) \end{pmatrix} P^{-1} / a, c \in \mathbb{R} \right\}$ et en notant $M = P \begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix} P^{-1}$ on a

$\mathcal{C}(A) = \text{Vect}(I, M)$ famille qui est libre (si $\alpha I + \beta M = 0$ alors $P^{-1}(\alpha I + \beta M)P = 0$ et $\alpha I + \beta \begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix} = 0$ d'où $\alpha = \beta = 0$)

Conclusion : (I, M) est une base de $\mathcal{C}(A)$ et donc $\dim(\mathcal{C}(A)) = 2$ si A n'est pas colinéaire avec I

Bilan : exercice calculatoire avec une idée pour les propriétés de la semblable. Autonomie indispensable à la dernière question.

PROBLÈME

Dans tout le problème, on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

La partie II est indépendante de la partie I et la partie III est indépendante de la partie II.

Partie I. Analyse

1.

- (a) Par récurrence, pour tout $n : u_n \in \mathbb{N}$
c'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in \mathbb{N}$ et $u_{n+1} \in \mathbb{N}$ alors $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \in \mathbb{N}$ (récurrence à 2 termes)

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n \in \mathbb{N}$

et pour tout $n \geq 0 : u_{n+2} - u_{n+1} = u_n \geq 0$ (car $u_n \in \mathbb{N}$) donc la suite est croissante à partir de l'indice 1, et comme $u_0 \leq u_1$

Conclusion : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.

- (b) Si elle est convergente vers une limite finie ℓ alors u_n, u_{n+1} et u_{n+2} ont cette même limite et comme $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ alors $\ell = \ell + \ell$ d'où $\ell = 0$.

Mais comme la suite est croissante et que $u_1 = 1$, c'est impossible.

Conclusion : La suite n'est pas convergente

Dans toute la suite du problème, a et b ($a > b$) désignent les deux solutions de l'équation du second degré suivante : $x^2 - x - 1 = 0$

2.

- (a) Le discriminant est $\Delta = 1 + 4 = 5$ d'où $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

$$\text{Donc } 1 - a = 1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = b$$

$$ab = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1 - 5}{4} = -1 \text{ donc } b = -\frac{1}{a}$$

$$\text{Enfin, } 1 < 5 < 9 \text{ donc } 1 < \sqrt{5} < 3 \text{ donc } 1 < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} < 2$$

Conclusion : $b = 1 - a = -\frac{1}{a}$ et $1 < a < 2$.

- (b) La suite u est récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants d'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$ ayant pour racines a et b .

Et il existe donc A et B réels tels que, pour tout $n : u_n = Aa^n + Bb^n$ avec $\begin{cases} u_0 = 0 = A + B \\ u_1 = 1 = aA + bB \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} B = -A \\ u_1 = 1 = (a - b)A \end{cases} \iff \begin{cases} B = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ A = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \text{ car } a - b = \sqrt{5}$$

Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$

(c) $\frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}a^n(1 - (b/a)^n)$ et comme $\frac{b}{a} = -\frac{1}{a^2}$ et $\frac{1}{a^2} < 1$ alors $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$ et

Conclusion : $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}a^n$ lorsque n tend vers $+\infty$

3. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\beta_n = u_{n+1} - au_n$.

$$\begin{aligned}\beta_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}(a^{n+1} - b^{n+1})u_{n+1} - a\frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-b + a)b^n \text{ avec } a - b = \sqrt{5} \\ &= b^n\end{aligned}$$

Conclusion : $\beta_n = b^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

4. On rappelle que pour tout réel x , la partie entière de x est l'entier noté $\lfloor x \rfloor$ qui vérifie : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

(a) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'égalité suivante : $\lfloor au_{2n} \rfloor = u_{2n+1} - 1$

Puisque $u_{2n+1} - 1$ est un entier, il suffit pour cela de montrer que $u_{2n+1} - 1 \leq au_{2n} < u_{2n+1}$:

$$\begin{aligned}u_{2n+1} - au_{2n} &= \beta_{2n} = b^{2n} > 0 \text{ et} \\ u_{2n+1} - au_{2n} - 1 &= \beta_{2n} - 1 \\ &= b^{2n} - 1 \leq 0\end{aligned}$$

car $b = 1 - a \in]-1, 0[$ du fait que $1 < a < 2$ et donc $b^n \leq 1$

Donc $u_{2n+1} - 1 \leq au_{2n} < u_{2n+1}$ et

Conclusion : $\lfloor au_{2n} \rfloor = u_{2n+1} - 1$

(b) En reprenant les calculs précédents, on a cette fois :

$$\begin{aligned}u_{2n} - au_{2n-1} &= \beta_{2n-1} = b^{2n-1} \leq 0 \text{ et} \\ u_{2n} - au_{2n-1} + 1 &= \beta_{2n-1} + 1 \\ &= b^{2n-1} + 1 > 0\end{aligned}$$

donc $u_{2n} \leq au_{2n-1} < u_{2n} + 1$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \lfloor au_{2n-1} \rfloor = u_{2n}$

5. Soit y un réel fixé vérifiant $|y| < 1$ et k un entier fixé de $\mathbb{N}$.

(a) On a : $n^k |y|^n = n^{-2} n^{k+2} |y|^n$ et comme $|y|^n = o(n^{-(k+2)})$ car $|y| < 1$ alors $n^{k+2} |y|^n = |y|^n / n^{-(k+2)} \rightarrow 0$ et $n^k |y|^n = o(n^{-2})$

Or la série $\sum_{n \geq 1} n^{-2}$ (de Riemann) est convergente, donc par majoration de termes positif la série

$\sum_{n \geq 1} |n^k y^n|$ converge et

Conclusion : la série $\sum_{n \geq 1} n^k y^n$ est absolument convergente.

(b) on a montré que $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}a^n$ donc $n^k \frac{u_n}{2^{n+1}} \sim \frac{1}{2\sqrt{5}} n^k \left(\frac{a}{2}\right)^n$

Or la série $\sum_{n \geq 1} n^k \left(\frac{a}{2}\right)^n$ est convergente car $\left|\frac{a}{2}\right| < 1$ (du fait que $1 < a < 2$) et par équivalence de

termes positifs, la série $\sum_{n \geq 1} \left| n^k \frac{u_n}{2^{n+1}} \right|$ est convergente

Conclusion : la série $\sum_{n \geq 1} n^k \frac{u_n}{2^{n+1}}$ est absolument convergente donc convergente

(c) La série étant convergente,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_{n+2} - u_{n+1}}{2^{n+1}} \text{ puisqu'il faut l'utiliser} \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_{n+2}}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{2^{n+1}} \text{ car chacune converge} \\
 &= \sum_{m=3}^{+\infty} \frac{u_m}{2^{m-1}} - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{u_m}{2^m} \text{ et on fait réapparaître la première} \\
 &= 4 \sum_{m=3}^{+\infty} \frac{u_m}{2^{m+1}} - 2 \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{u_m}{2^{m+1}} \\
 &= 4 \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{u_m}{2^{m+1}} - \frac{u_1}{4} - \frac{u_2}{8} \right) - 2 \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{u_m}{2^{m+1}} - \frac{u_1}{4} \right) \\
 &= 2 \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{u_m}{2^{m+1}} - 1 \text{ car } u_0 = 0 \text{ et } u_1 = u_2 = 1
 \end{aligned}$$

Conclusion : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}} = 1$

Bilan : des calculs qui demandent à être bien menés.

Partie II. Algèbre et algorithmique

1. Soit A la matrice carrée d'ordre 4 définie par : $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(a) Les deux colonnes du milieu sont égales, donc les colonnes sont liées. Mais A est symétrique

Conclusion : A n'est pas inversible mais elle est diagonalisable

$$\begin{aligned}
 \text{(b) } A^2 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
 \text{et } A^3 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Conclusion : on constate que $A^3 = A^2 + A$ combinaison linéaire

(c) Si α est valeur propre de A alors $\alpha^3 = \alpha^2 + \alpha$ donc $\alpha(\alpha^2 - \alpha - 1) = 0$

$\alpha^2 - \alpha - 1$ a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$ et pour racines $\frac{-1 + \sqrt{5}}{-2} = b$ et $\frac{-1 - \sqrt{5}}{-2} = a$.

Donc les seules valeurs propres possibles sont 0, b et a .

A étant non inversible, 0 est bien valeur propre.

Courage et méthode. résoudre avec les écritures en racine va être monstrueux. On reste formel.

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} (A - \alpha I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t = 0 & L_1 - 2\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)L_2 \\ \frac{1}{2}x - \alpha y + \frac{1}{2}t = 0 & L_2 \\ \frac{1}{2}x - \alpha z + \frac{1}{2}t = 0 & L_3 - L_2 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)t = 0 & L_4 - L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left[\frac{1}{2} + 2\alpha\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\right]y + \frac{1}{2}z + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\right]t = 0 & L_1 - 2\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)L_2 \\ \frac{1}{2}x - \alpha y + \frac{1}{2}t = 0 & L_2 \\ \alpha y - \alpha z = 0 & L_3 - L_2 \\ \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)y + \frac{1}{2}z - \alpha t = 0 & L_4 - L_2 \end{cases} \quad \text{et pour } \alpha \neq 0$$

$$\iff \begin{cases} [1 + \alpha - 2\alpha^2]z + \alpha t = 0 & L_1 + L_4 \\ \frac{1}{2}x - \alpha z + \frac{1}{2}t = 0 & L_2 \\ y = z \\ (1 + \alpha)z - \alpha t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} [2 + 2\alpha - 2\alpha^2]z = 0 & L_1 - L_4 \\ \frac{1}{2}x - \alpha z + \frac{1}{2}t = 0 & L_2 \\ y = z \\ (1 + \alpha)z - \alpha t = 0 \end{cases}$$

Avec $2 + 2\alpha - 2\alpha^2$ qui a pour racines a et b .

Conclusion : $\boxed{0, a \text{ et } b \text{ sont les valeurs propres de } A}$

(d) Par récurrence :

$$A^1 = 1A + 0A^2n$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tels qu'il existe a_n et b_n avec $A^n = a_n A + b_n A^2$ alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A(a_n A + b_n A^2) \\ &= a_n A^2 + b_n A^3 \\ &= a_n A^2 + b_n (A^2 + A) \\ &= b_n A + (a_n + b_n) A^2 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{il existe } (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ et } (b_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ avec, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} : A^n = a_n A + b_n A^2}$

(e) On a de plus $a_{n+1} = b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$ donc $a_{n+2} = b_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$b_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} = b_{n+1} + b_n$$

Conclusion : $\boxed{(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ et } (b_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ vérifient la même relation de récurrence linéaire d'ordre 2 que } u_n.}$

2. Pour calculer u_{n+2} on a besoin de $u_n \rightarrow u$ et de $u_{n+1} \rightarrow v$

Quand on passe de n à $n+1$ on a les substitutions : $u_n \rightarrow u_{n+1}$ et $u_{n+1} \rightarrow u_{n+2}$

Il faut donc mettre de côté la valeur de $v = u_{n+1}$ avant de l'écraser par u_{n+2} .

La valeur de k est l'indice du terme contenu dans u (pour $k = 1$, on calcule u_2)

Donc pour $k = n - 1$, le terme u_n sera contenu dans v .

```
def f(n):
    u, v = 0, 1
    for k in range(1, n):
        temp = v
        v = u + v
        u = temp
    return(v)
```

3. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On dit que n admet une Z -décomposition s'il existe un entier r de $\mathbb{N}^*$ tel que l'on puisse écrire $n = u_{k_1} + u_{k_2} + \dots + u_{k_r}$, où, pour tout i de $[[1, r]]$ k_i est un entier supérieur ou égal à 2 et où, pour tout i de $[[1, r - 1]]$ (avec $r \geq 2$), on a : $k_{i+1} - k_i \geq 2$.

(a) On liste les premières valeurs de u_n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
u_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

En partant du plus gros et en comblant les trous :

On a $37 - 34 = 3$ donc $37 = u_4 + u_9$ avec $9 - 5 \geq 2$

et $272 - 233 = 39$

$39 - 34 = 5$

Donc $272 = u_5 + u_9 + u_{13}$ avec $9 - 5 \geq 2$ et $13 - 9 \geq 2$

Conclusion : 37 et 272 admettent bien une Z -décomposition.

b) et c) Soit n un entier admettant une Z -décomposition de la forme $n = u_{k_1} + u_{k_2} + \dots + u_{k_r}$.

Pour $r = 1$ on a $n = u_{k_1}$ donc $n < u_{k_1+1}$

Soit $r \geq 1$ tel que si n admet une Z -décomposition à r termes alors $n < u_{k_r+1}$

alors si n admet une Z -décomposition à $r + 1$ termes $n = u_{k_1} + u_{k_2} + \dots + u_{k_r} + u_{k_{r+1}}$ on se ramène à une décomposition à r termes :

$n - u_{k_{r+1}} = u_{k_1} + u_{k_2} + \dots + u_{k_r}$ admet une Z -décomposition à r termes donc $n - u_{k_{r+1}} < u_{k_r+1}$ et $n < u_{k_{r+1}} + u_{k_r+1}$

et comme $k_{r+1} \geq k_r + 2$ donc $k_r + 1 \leq k_{r+1} - 1$

la suite u étant croissante $u_{k_r+1} \leq u_{k_{r+1}-1}$ donc $n < u_{k_{r+1}} + u_{k_{r+1}-1} = u_{k_{r+1}+1}$ (d'après la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour l'entier $n = k_{r+1} - 1 \geq 0$ car $k_{r+1} \geq k_1 + 2$)

Conclusion : Pour tout $r \geq 1$ si n a une Z -décomposition à r termes alors $n < u_{k_r+1}$

D'autre part, on a $n = u_{k_1} + u_{k_2} + \dots + u_{k_r} \geq u_{k_r}$

Conclusion : k_r est donc le plus grand entier j pour lequel $u_j \leq n$ et k_r est donc unique

Le dernier terme de la décomposition étant unique, par une récurrence décroissante (avec $n - u_{k_r}$) tous les termes de décomposition sont uniques et leur nombre donc également.

Conclusion : r est unique et (c) tout entier n admet une unique Z -décomposition

```

4. import numpy as np
   p=20
   Res=np.zeros(p)
   def procedureZ(n,Res):
       i=p
       while i>1 :
           if u[i]>n:
               Res[i]=0
           else:
               Res[i]=u[i]
               n=n-u[i]
           i=i-1
       return(Res)

```

A la fin de cette procédure il pourra rester 0 ou 1 dans n , et il faudrait compléter la Z -décomposition

Partie III. Probabilités

On effectue dans une urne qui contient des boules numérotées 0 ou 1 une suite illimitée de tirages avec remise d'une boule. À chaque tirage, la probabilité de tirer une boule numérotée 1 est p ($0 < p < 1$) et la probabilité de tirer une boule numérotée 0 est q , avec $q = 1 - p$, et on suppose que les résultats des différents tirages sont indépendants.

On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. On s'intéresse au nombre de tirages nécessaires pour obtenir deux boules numérotées 1 de suite, c'est-à-dire lors de deux tirages consécutifs. On définit, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, les événements S_i : "le i -ième tirage donne une boule numérotée 1", et $B_i = S_i \cap S_{i+1}$.

Si au moins un des événements B_i se réalise au cours de l'expérience, on note Y la valeur de l'entier j correspondant au premier événement B_j réalisé. Sinon, c'est-à-dire si aucun des événements B_i ne se réalise, on attribue à Y la valeur 0. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.

Par exemple, si le résultat de l'expérience est : 0,1,0,0,0, 1,1,0,1,1,0, ., alors Y prend la valeur 6.

1. (a) $B_i = S_i \cap S_{i+1}$ indépendants donc $P(B_i) = P(S_i)P(S_{i+1}) = p^2$
 (b) $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ (la valeur 0 jouant un rôle particulier)
 en listant les possibles :
 $(Y = 1) = B_1$ et $P(Y = 1) = p^2$
 $(Y = 2) = \overline{S_1} \cap S_2 \cap S_3$ et $P(Y = 2) = qp^2$ par indépendance
 $(Y = 3) = (\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap S_3 \cap S_4) \cup (S_1 \cap \overline{S_2} \cap S_3 \cap S_4)$ incompatible donc $P(Y = 3) = (q^2 + qp)p^2 = qp^2$
 car $p + q = 1$

2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note C_n , l'événement "lors des n premiers tirages il n'apparaît jamais deux fois de suite une boule numérotée 1". On pose : $C_0 = \Omega$.

- (a) En listant les possibles :

$$P(C_0) = 1$$

$$C_1 = S_1 \cup \overline{S_1} = \Omega \text{ et } P(C_1) = 1$$

$$C_2 = (\overline{S_1} \cap \overline{S_2}) \cup (\overline{S_1} \cap S_2) \cup (S_1 \cap \overline{S_2}) \text{ et } P(C_2) = q^2 + 2pq = 1 - p^2$$

- (b) $[Y = n + 2]$ signifie qu'on a pour la première fois deux boules 1 en $n + 2$ et $n + 3$ donc

- que l'on a deux boules 1 en $n + 2$ et en $n + 3$
- qu'en n c'est une boule 0 (sinon on a S_{n+1} et S_{n+2})
- qu'avant il n'y a pas eu de double boules 1

Donc $[Y = n + 2] = C_n \cap \overline{S_{n+1}} \cap S_{n+2} \cap S_{n+3}$, indépendants donc

$$\text{Conclusion : } \boxed{P([Y = n + 2]) = p^2 q P(C_n) \text{ pour } n \geq 1 \text{ et pour } n = 0}$$

3. (a) Pour que C_n soit réalisé :

- soit il y a $\overline{S_1}$ et il faut et suffit alors de ne pas avoir de double 1 dans les $n - 1$ tirages suivants. (même probabilité que C_{n-1})
- soit il y a S_1 et il ne faut S_2 puis aucun double 1 dans les $n - 2$ tirages restant (même probabilité que C_{n-2})

$(S_1, \overline{S_1})$ étant un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} P(C_n) &= P_{S_1}(C_n)P(S_1) + P_{\overline{S_1}}(C_n)P(\overline{S_1}) \\ &= P(C_{n-2})P(S_2)P(S_1) + P(C_n)P(\overline{S_1}) \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{P(C_n) = qP(C_{n-1}) + pqP(C_{n-2}) \text{ pour tout } n \geq 2}$$

- (b) et comme $P([Y = n + 2]) = p^2 q P(C_n)$ pour tout $n \geq 0$, on substitue pour écrire $P([Y = n + 1]) = p^2 q P(C_{n-1})$ et $P([Y = n]) = p^2 q P(C_{n-2})$ pour $n \geq 2$

On avait $P(C_n) = qP(C_{n-1}) + pqP(C_{n-2})$ pour tout $n \geq 2$ donc (en divisant par $p^2 q \neq 0$)

$$P(Y = n + 2) = qP(Y = n + 1) + pqP(Y = n) \text{ pour } n \geq 2$$

Et on teste la relation pour $n = 1$.

$$P(Y = 1) = p^2, P(Y = 2) = qp^2; P(Y = 3) = (q^2 + qp)p^2 = qp^2$$

donc

$$\begin{aligned} qP(Y = 2) + pqP(Y = 1) &= qp^2 + qp^2 \\ &= qp^2(q + p) \\ &= P(Y = 3) \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* : P(Y = n + 2) = qP(Y = n + 1) + pqP(Y = n)}$$

4. On suppose dans cette question que $p = q = 1/2$.

(a) On peut faire une récurrence à deux termes ou éviter la récurrence

en vérifiant sur $\frac{u_n}{2^{n+1}}$ les conditions initiales et la relation de récurrence caractérisant $(P(Y = n))_{n \in \mathbb{N}^*}$:

$\frac{u_1}{2^2} = \frac{1}{4} = p^2 = P(Y = 1)$; $\frac{u_2}{2^3} = \frac{1}{8} = qp^2 = P(Y = 2)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} q \frac{u_{n+1}}{2^{n+2}} + pq \frac{u_n}{2^{n+1}} &= \frac{u_{n+1}}{2^{n+3}} + \frac{u_n}{2^{n+3}} \\ &= \frac{1}{2^{n+3}} (u_{n+1} + u_n) \\ &= \frac{u_{n+2}}{2^{n+3}} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, \text{ on a : } P([Y = n]) = \frac{u_n}{2^{n+1}}}$

(b) $(Y = n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événement donc $\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n) = 1$ et $P(Y = 0) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(Y = n) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$

Et on a vu au I 5 c) que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}} = 1$

Conclusion : $\boxed{P(Y = 0) = 0}$

(c) On note $E(Y)$ l'espérance de Y .

Si la série est absolument convergente, $E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(Y = n)$ ce qui équivaut à sa simple convergence.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N nP(Y = n) &= 0 + \sum_{n=1}^N n \frac{u_n}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \sum_{n=1}^N n \left(\left(\frac{a}{2} \right)^n - \left(\frac{b}{2} \right)^n \right) \\ &\rightarrow \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\frac{a/2}{(1 - a/2)^2} - \frac{b/2}{(1 - b/2)^2} \right] \text{ car } \left| \frac{a}{2} \right| < 1 \text{ et } \left| \frac{b}{2} \right| < 1 \end{aligned}$$

Donc la série est absolument convergente, Y a une espérance et $(b = 1 - a = -\frac{1}{a})$

$$\begin{aligned} \sqrt{5}E(Y) &= \frac{a}{(2-a)^2} - \frac{b}{(2-b)^2} \\ &= \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\left(2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} - \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\left(2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2} \\ &= 2 \frac{1+\sqrt{5}}{(3-\sqrt{5})^2} - 2 \frac{1-\sqrt{5}}{(3+\sqrt{5})^2} \\ &= 2 \frac{(1+\sqrt{5})(14+6\sqrt{5}) - (1-\sqrt{5})(14-6\sqrt{5})}{(9-5)^2} \\ &= 2 \frac{44+20\sqrt{5} - [44-20\sqrt{5}]}{4^2} \\ &= 2 \frac{40\sqrt{5}}{4^2} = 5\sqrt{5} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{Y \text{ a une espérance et } E(Y) = 5}$

(d) On calcule l'espérance de Y^2 :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^N n^2 P(Y=n) &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \sum_{n=1}^N n^2 \left(\left(\frac{a}{2}\right)^n - \left(\frac{b}{2}\right)^n \right) \\ &\rightarrow \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\frac{a/2(1+a/2)}{(1-a/2)^3} - \frac{b/2(1+b/2)}{(1-b/2)^3} \right]\end{aligned}$$

Donc Y^2 a une espérance et

$$\begin{aligned}\sqrt{5}E(Y^2) &= \frac{a(2+a)}{(2-a)^3} - \frac{b(2+b)}{(2-b)^3} \\ &= 2 \frac{(1+\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})^3} - 2 \frac{(1-\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})^3}\end{aligned}$$

avec $(3-\sqrt{5})^3 = 72 - 32\sqrt{5} = 8(9-4\sqrt{5})$ et $(3+\sqrt{5})^3 = 8(9+4\sqrt{5})$ donc

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{5}}{2}E(Y^2) &= \frac{(10+6\sqrt{5})8(9+4\sqrt{5}) - (10-6\sqrt{5})8(9-4\sqrt{5})}{4^3} \\ &= 8 \cdot 2 \frac{(5+3\sqrt{5})(9+4\sqrt{5}) - (5-3\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})}{4^3} \\ &= \frac{47}{2}\sqrt{5}\end{aligned}$$

Donc $E(Y^2) = 47$ et $V(Y) = 47 - 25 = 22$

5. On revient au cas général : $0 < p < 1$ et $q = 1 - p$.

(a) L'équation du second degré $Q(x) = x^2 - qx - pq = 0$ a pour discriminant $\Delta = q^2 + 4pq > 0$

Elle a donc deux racines distinctes $s = \frac{q - \sqrt{\Delta}}{2} < r = \frac{q + \sqrt{\Delta}}{2}$

(b) On connaît le signe d'un polynôme du second degré par rapport à ses racines :

$Q(0) = -pq < 0$ donc $s < 0 < r$

$Q(1) = 1 - q - pq = p - pq = p(1 - q) = p^2 > 0$ donc 1 est extérieur aux racines et $1 > r$ (puisque 1 n'est pas inférieur à s)

$Q(-1) = 1 + q - pq = 1 + q(1 - p) = 1 + q^2 > 0$ donc $-1 < s$

Comme $s < 0$ on a $|s| = -s$ et $r + s = q > 0$ d'où

Conclusion : $\boxed{-1 < s < 0 < r < 1 \text{ et } r > |s|}$

(c) On pose $\Delta = q + 4pq$.

On avait, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P(Y = n + 2) = qP(Y = n + 1) + pqP(Y = n)$

suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique $x^2 - qx - pq = 0$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P(Y = n) = Ar^n + Bs^n$ avec A et B satisfaisant les conditions pour $n = 1$ et pour $n = 0$

On vérifie que c'est le cas pour $A = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}$ et $B = -\frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}$:

$$\begin{aligned}\frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}r - \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}s &= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}(r - s) = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}(\sqrt{\Delta}) \\ &= P(Y = 1) \\ \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}r^2 - \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}s^2 &= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}(r - s)(r + s) \\ &= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}(\sqrt{\Delta})q \\ &= P(Y = 2)\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a : $P([Y = n]) = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} (r^n - s^n)$

(d) On calcule comme précédemment la probabilité du contraire :

$$\begin{aligned}
 P(Y \geq 1) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P([Y = n]) \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} (r^n - s^n) \\
 &= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} r^n - \sum_{n=1}^{+\infty} s^n \right) \text{ car chacune converge} \\
 &= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \left(\frac{1}{1-r} - 1 - \frac{1}{1-s} + 1 \right) \text{ et} \\
 (1-r)(1-s) &= \left(\frac{2-q-\sqrt{\Delta}}{2} \right) \left(\frac{2-q+\sqrt{\Delta}}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{4} ((2-q)^2 - \Delta) \\
 &= \frac{1}{4} (4 - 4q + q^2 - q^2 - 4(1-q)q) \\
 &= \frac{1}{4} (4q^2 - 8q + 4) \\
 &= (q-1)^2 = p^2 \text{ donc} \\
 P(Y \geq 1) &= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \left(\frac{r-s}{p^2} \right) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} = 1
 \end{aligned}$$

Conclusion : $P(Y = 0) = 0$

(e) Y admet un moment d'ordre $k \geq 0$ si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} n^k (r^n - s^n)$ converge absolument

Or $|r^n - s^n| \leq r^n + s^n$

Reste à voir la convergence des séries $\sum_{n \geq 0} n^k r^n$ et $\sum_{n \geq 0} n^k s^n$.

$n^k r^n = n^k r^{n/2} r^{n/2}$ avec $r^{n/2} = o(n^{-r})$ donc $n^k r^{n/2} \rightarrow 0$ et $n^k r^n = o(r^{n/2})$

Or $\sum_{n \geq 0} r^{n/2}$ converge car $|\sqrt{r}| < 1$.

Donc par majoration de termes positifs, $\sum_{n \geq 0} n^k r^n$ converge et de même pour $\sum_{n \geq 0} n^k s^n$

Finalement, par majoration de termes positifs, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} n^k (r^n - s^n)$ est absolument convergente.

Conclusion : Y admet des moments de tous ordres

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} n (r^n - s^n) &= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} n r^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n s^n \right] \\
&= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \left[\frac{r}{(1-r)^2} - \frac{s}{(1-s)^2} \right] \\
&= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \left[\frac{\frac{q+\sqrt{\Delta}}{2} \left(\frac{2-q+\sqrt{\Delta}}{2} \right)^2 - \frac{q-\sqrt{\Delta}}{2} \left(\frac{2-q-\sqrt{\Delta}}{2} \right)^2}{p^4} \right] \\
&= \frac{1}{8p^2\sqrt{\Delta}} \left[\left(q + \sqrt{\Delta} \right) \left(2 - q + \sqrt{\Delta} \right)^2 - \left(q - \sqrt{\Delta} \right) \left(2 - q - \sqrt{\Delta} \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{8p^2\sqrt{\Delta}} \left[\begin{aligned} &\left(q + \sqrt{\Delta} \right) \left(4 + q^2 + \Delta + 4\sqrt{\Delta} - 2q\sqrt{\Delta} - 4q \right)^2 \\ &- \left(q - \sqrt{\Delta} \right) \left(4 + q^2 + \Delta - 4q - 4\sqrt{\Delta} + 2q\sqrt{\Delta} \right) \end{aligned} \right] \\
&= \frac{1}{8p^2\sqrt{\Delta}} \left[2\sqrt{\Delta} (-q^2 + \Delta + 4) \right] \\
&= \frac{1}{4p^2} [4pq + 4] = \frac{pq + 1}{p^2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $E(Y) = \frac{pq + 1}{p^2}$ qui coïncide bien dans le cas $p = q = \frac{1}{2}$

(f) Montrer, pour tout réel x vérifiant $|x| < \frac{1}{r}$,

On a $|rx| < 1$ et $|sx| < 1$ car $|s| < r$ donc les séries $r^n x^n$ et $s^n x^n$ sont absolument convergentes et la série $\sum_{n \geq 1} P([Y = n]) x^n$ est absolument convergente par majoration de termes positifs.

On pose alors : $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([Y = n]) x^n$.

(g) Pour tout réel x vérifiant $|x| < \frac{1}{r}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} P([Y = n]) x^n &= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} (rx)^n - \sum_{n=1}^{+\infty} (sx)^n \right] \\
&= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \left[\frac{1}{1-rx} - 1 - \frac{1}{1-sx} + 1 \right] \\
&= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \left[\frac{1}{1-rx} - \frac{1}{1-sx} \right] \\
&= \frac{p^2 x}{\sqrt{\Delta}} \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{\left(1 - \frac{q+\sqrt{\Delta}}{2} x \right) \left(1 - \frac{q-\sqrt{\Delta}}{2} x \right)} \right] \\
&= \frac{4p^2 x}{\left(2 - qx + \sqrt{\Delta} x \right) \left(2 - qx - \sqrt{\Delta} x \right)} \\
&= \frac{4p^2 x}{q^2 x^2 - 4qx - \Delta x^2 + 4} \\
&= \frac{4p^2 x}{q^2 x^2 - 4qx - (q^2 + 4pq) x^2 + 4} \\
&= \frac{p^2 x}{1 - qx - pqx^2}
\end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{g(x) = \frac{p^2 x}{1 - qx - pqx^2}}.$$

6. On suppose dans cette question que $p = 2/3$.

$$\text{On a donc } g(x) = \frac{\frac{4}{9}x}{1 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}x^2} = \frac{4x}{9 - 3x - 2x^2}$$

(a) $9 - 3x - 2x^2$, a pour discriminant $9 + 72 = 81$ et pour racines $\frac{3}{2}$ et -3

Donc g est dérivable C^2 sur $\left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[$ comme quotient de fonctions C^2 de dénominateur non nul.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{4(9 - 3x - 2x^2) - 4x(-3 - 4x)}{(9 - 3x - 2x^2)^2} \\ &= \frac{36 + 8x^2}{(9 - 3x - 2x^2)^2} > 0 \end{aligned}$$

Donc g est strictement croissante sur $\left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[$

En $\frac{3}{2}^-$: $9 - 3x - 2x^2 = -2(x + 3)\left(x - \frac{3}{2}\right) \rightarrow 0^+$ donc $g(x) \rightarrow +\infty$

En $-\frac{3}{2}^+$: $9 - 3x - 2x^2 \rightarrow 9 - \frac{9}{2} - \frac{9 \cdot 9}{2} = -36$ donc $g(x) \rightarrow -\frac{1}{6}$ Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $I = \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[$

(b) g est C^2 et

$$g''(x) = -\frac{8}{(2x^2 + 3x - 9)^3} (4x^3 + 54x + 27)$$

Soit $f(x) = 4x^3 + 54x + 27$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 12x^2 + 54 > 0$$

en $-\frac{1}{2}$: $f(x) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 54\left(-\frac{1}{2}\right) + 27 = -\frac{1}{2}$ et en 0 : $f(x) = 27 > 0$

f étant continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$ elle réalise une bijection de $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$ dans $\left]-\frac{1}{2}, 27\right[$

et comme $0 \in \left]-\frac{1}{2}, 27\right[$, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans cet intervalle.

Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle n'en a pas d'autres.

x	$-\frac{3}{2}$	α	$\frac{3}{2}$
$f(x)$	$-$	$+$	
$g''(x)$	$+$	0	$-$
$g'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Donc g est concave sur $\left]-\frac{3}{2}, \alpha\right[$ et convexe sur l'intervalle $\left]\alpha, \frac{3}{2}\right[$.

Et il n'y a pas d'autres réels α vérifiant cela.

(c) On trace l'asymptote verticale en $\frac{3}{2}$, la tangente en $-\frac{3}{2}$ de pente $g'\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{36 + 8\frac{9}{4}}{(9 + 3\frac{3}{2} - 2\frac{9}{4})^2} = \frac{20}{37} \simeq 0,5$

et on part concave (donc sous la tangente) et on redresse pour partir vers l'asymptote

Bilan : des calculs de sommes sécurisés pour la plupart mais lourds à mener.