

Option Économique

MATHÉMATIQUES

6 Octobre 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Les questions précédées de (*) sont destinées aux cubes.

Exercice n°1

Pour $x \in]0; +\infty[$ on pose : $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n .

1. (a) Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ (on dressera son tableau de variations, en précisant les limites).

- (b) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

2. Informatique.

- (a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que l'appel `fonc_1(a)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$.

```
def fonc_1(a):  
    from numpy import exp  
    u=1  
    n=0  
    while ..... :  
        u=exp(-u)/u  
        n = .....  
    return n
```

- (b) On considère maintenant la fonction Python :

```
from numpy import exp  
def fonc_2(a):  
    u=1  
    n=0  
    while u<a:  
        u=exp(-u)/u  
        n=n+1  
    return n
```

Les appels `fonc_1(10**6)` et `fonc_2(10**(-6))` donnent respectivement 6 et 5.

Qu'en déduire pour u_5 et u_6 ?

Commenter ce résultat en une ligne.

- (c) Écrire une fonction Python qui a pour argument un entier n et qui renvoie la liste des termes de u_0 à u_n .
 - (d) Compléter le programme précédent afin qu'il donne une représentation graphique des 100 premiers termes de la suite.
3. Pour $x \in [0; +\infty[$ on pose : $g(x) = e^{-x} - x^2$.
- (a) Démontrer que la fonction $g : x \mapsto g(x)$ réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $] -\infty; 1]$.
 - (b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x , possède une unique solution dans l'intervalle $]0; +\infty[$, que l'on notera α .
 - (c) Justifier que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$. *On rappelle que $e \approx 2,7$.*
 - (d) Recopier et compléter le programme Python suivant afin qu'il définisse la fonction g et donne une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

```
def g(x):  
    return (...)  
  
a=1/np.exp(1)  
b=1  
c=(a+b)/2  
while ... :  
    if g(a)g(c)>0:  
        ...  
    else :  
        ...  
    c=(a+b)/2  
return (...)
```

- 4. (a) Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$.
 - (b) En déduire que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 - (c) Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
5. Pour $x \in]0; +\infty[$ on pose : $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$.
- (a) Soit x un réel strictement positif. Déterminer $h(x)$.
 - (b) Démontrer que la fonction $h : x \mapsto h(x)$ est continue sur $[0; +\infty[$.
 - (c) Démontrer que l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x , admet exactement deux solutions sur $[0; +\infty[$ qui sont 0 et α , α étant le réel introduit à la question 3.(b).
 - (d) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
6. La suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle majorée ? Admet-elle une limite ?

Exercice n°2

On considère l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que (A, B, C) est une base de $\mathcal{E}$.

2. Etablir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est à dire :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, MN \in \mathcal{E}$$

3. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

Pour toute matrice de $\mathcal{E}$, on note $f(M) = TMT$.

4. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

5. Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

6. (*) Est-ce que T est diagonalisable ?

On note F la matrice de f dans la base (A, B, C) de $\mathcal{E}$.

7. Calculer $f(A), f(B), f(C)$ en fonction de (A, B, C) et en déduire F .

8. (a) (*) Montrer que f admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci, puis déterminer une base et la dimension du sous-espace propre pour f associé à cette valeur propre.

(b) (*) Est-ce que f est diagonalisable ?

(c) (*) Soit λ un réel différent de 1. Résoudre l'équation $f(M) = \lambda M$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Calculer H^2 , puis pour tout a de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, $(I + aH)^n$.

10. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, F^n .

11. Trouver une matrice G de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$. Existe-t-il un endomorphisme g de $\mathcal{E}$ tel que $g \circ g \circ g = f$?

Exercice n°3

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N , et on effectue une succession illimitée de tirages d'une boule avec remise dans l'urne. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire indiquant le numéro de la boule obtenue au k -ième tirage.

Pour tout entier $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$, on note T_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir i numéros distincts, ainsi $T_i = k$ si on a obtenu i numéros distincts lors des k premiers tirages, mais seulement $i - 1$ numéros distincts lors des $k - 1$ premiers tirages.

Exemple : on suppose $N = 4$, si les huit premiers tirages donnent

i	1	2	3	4	5	6	7	8
X_i	2	3	3	3	1	2	1	4

alors $T_1 = 1, T_2 = 2, T_3 = 5$ et $T_4 = 8$.

Partie A : Simulation informatique

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Reconnaitre la loi de X_k .

2. Le programme en langage Python ci-dessous définit une fonction `ajout` qui prend en argument une liste L et un entier x .

```
def ajout(L, x):  
    if (x in L) == False :  
        L.append (x)
```

Expliquez succinctement comment et à quelle condition l'exécution de la commande `ajout (L,x)` modifie la liste L .

3. Recopier et compléter la fonction Python `Simul_T` ci-dessous.

Cette fonction prend en argument deux entiers $N \in \mathbf{N}^*$ et $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$. Elle a pour but de simuler la variable aléatoire T_i . Dans le script nous notons :

- L la liste sans répétition des numéros sortis lors des tirages effectués ;
- k le rang du tirage en cours ;
- x le résultat du tirage en cours.

```
import numpy.random as rd
def Simul_T(N, i):
    L = []
    k = 0
    while ... :
        x = rd.randint(1, N+1)
        ajout(L, x)
        k = ...
    return (...)
```

4. On suppose $N = 3$.

Rédiger un programme Python qui calcule et affiche la moyenne de 100 réalisations de `Simul_T(3,2)`. Que représente le résultat obtenu par rapport à la variable aléatoire T_2 ?

Partie B : Étude de T_2 dans le cas d'une urne contenant trois boules

Dans cette partie on suppose $N = 3$, ainsi l'urne contient exactement trois boules numérotées 1, 2 et 3 .

5. Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire T_2 .
6. Soit $k \geq 2$ un entier fixé.
 - (a) Décrire l'évènement $(T_2 = k) \cap (X_1 = 1)$ à l'aide des évènements $(X_j = 1)$ et $(X_j \neq 1)$ avec $j \in \mathbf{N}^*$.
 - (b) En déduire $P((T_2 = k) \cap (X_1 = 1))$.
 - (c) Montrer que $P(T_2 = k) = \frac{2}{3^{k-1}}$.
7. Justifier que T_2 admet une espérance et la calculer.
8. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z_2 = T_2 - 1$.
Reconnaître une loi usuelle, retrouver l'espérance de T_2 et donner sa variance.

Partie C : Quelques résultats dans le cas général

On retourne au cas général, l'urne contient N boules numérotées de 1 à N .

Pour tout $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$, on note Z_i la variable aléatoire définie par :

$$\begin{cases} Z_1 = 1 & \text{si } i = 1 \\ Z_i = T_i - T_{i-1} & \text{si } i \geq 2 \end{cases}$$

La variable aléatoire Z_i donne le nombre de tirages nécessaires, après le T_{i-1} -ième tirage, pour obtenir un numéro distinct des $i - 1$ numéros déjà tirés.

On admet que les variables aléatoires $Z_1, \dots, Z_N$ sont indépendantes.

Décomposition de T_i

9. Soit $i \in \llbracket 2; N \rrbracket$.

- (a) Justifier que Z_i suit la loi géométrique de paramètre $\frac{N-i+1}{N}$.
- (b) Exprimer $E(Z_i)$ et $V(Z_i)$ en fonction de i et N . Vérifier que ces formules restent vraies pour $i = 1$.
- (c) Soit $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$. Exprimer T_i comme somme de $Z_1, \dots, Z_i$.

Loi de T_3

10. (a) Calculer $P((Z_2 = \ell) \cap (Z_3 = k))$ pour tous ℓ et k dans $\mathbf{N}^*$.

(b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$P(Z_2 + Z_3 = n) = \frac{(N-1)(N-2)}{2} \left(\left(\frac{2}{N} \right)^n - \frac{2}{N^n} \right).$$

(c) Déterminer la loi de T_3 .

Espérance et covariance

11. Soit $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$, montrer que $E(T_i) = N \sum_{k=N-i+1}^N \frac{1}{k}$.

12. (*) Soient i et j deux entiers tels que $1 \leq i \leq j \leq N$, montrer que

$$\text{cov}(T_i, T_j) = V(T_i)$$

où $\text{cov}(T_i, T_j)$ désigne la covariance de T_i et T_j .