

Option Économique

MATHÉMATIQUES

06 Octobre 2025

Exercice n°1 - EML 2023

Pour $x \in]0; +\infty[$ on pose : $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n .

1. (a) Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ (on dressera son tableau de variations, en précisant les limites).
- (b) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

2. Informatique.

- (a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que l'appel `fonc_1(a)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$.

```
def fonc_1(a):
    from numpy import exp
    u=1
    n=0
    while ..... :
        u=exp(-u)/u
        n=.....
    return n
```

- (b) On considère maintenant la fonction Python :

```
from numpy import exp
def fonc_2(a):
    u=1
    n=0
    while u<a:
        u=exp(-u)/u
        n=n+1
    return n
```

Les appels `fonc_1(10**6)` et `fonc_2(10**(-6))` donnent respectivement 6 et 5.

Qu'en déduire pour u_5 et u_6 ?

Commenter ce résultat en une ligne.

- (c) Écrire une fonction Python qui a pour argument un entier n et qui renvoie la liste des termes de u_0 à u_n .

(d) Compléter le programme précédent afin qu'il donne une représentation graphique des 100 premiers termes de la suite.

3. Pour $x \in [0; +\infty[$ on pose : $g(x) = e^{-x} - x^2$.

(a) Démontrer que la fonction $g : x \mapsto g(x)$ réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $] -\infty; 1]$.

(b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x , possède une unique solution dans l'intervalle $]0; +\infty[$, que l'on notera α .

(c) Justifier que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$. On rappelle que $e \approx 2,7$.

(d) Recopier et compléter le programme Python suivant afin qu'il définisse la fonction g et donne une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

```
def g(x):
    return (...)

a=1/np.exp(1)
b=1
c=(a+b)/2
while ... :
    if g(a)*g(c)>0:
        ...
    else:
        ...
    c=(a+b)/2
print(...)
```

4. (a) Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$.

(b) En déduire que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

(c) Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

5. Pour $x \in]0; +\infty[$ on pose : $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$.

(a) Soit x un réel strictement positif. Déterminer $h(x)$.

(b) Démontrer que la fonction $h : x \mapsto h(x)$ est continue sur $[0; +\infty[$.

(c) Démontrer que l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x , admet exactement deux solutions sur $[0; +\infty[$ qui sont 0 et α , α étant le réel introduit à la question 3.(b).

(d) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

6. La suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle majorée ? Admet-elle une limite ?

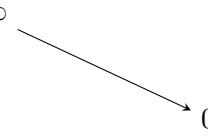
1. (a) La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}x - e^{-x}}{x^2} = \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}$$

Or, $x+1 > 0$ (car $x > 0$), $e^{-x} > 0$ et $x^2 > 0$, donc $f'(x) < 0$. Par conséquent, f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

Calculons ses limites. On a directement (pas de forme indéterminée) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

D'où le tableau de variations de f :

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	—
$f(x)$	$+\infty$  0

- (b) On montre par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « u_n est bien défini et $u_n > 0$ ».
C'est évident pour $n = 0$ (car $u_0 = 1$ d'après l'énoncé).

Maintenant, soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. On suppose $\mathcal{P}(n)$ et on montre $\mathcal{P}(n+1)$:

Par hypothèse de récurrence, u_n est bien défini et $u_n > 0$. En particulier, u_n appartient à l'ensemble de définition de f , donc $f(u_n)$ est bien défini, i.e u_{n+1} est bien défini.

De plus, d'après les variations de fonction f étudiées à la question précédente, on a $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Donc en particulier $f(u_n) > 0$, i.e $u_{n+1} > 0$. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 0$.

2. (a) On calcule les termes successifs de la suite jusqu'à avoir $u_n > a$, c'est-à-dire tant que $u_n \leq a$. D'où le programme :

```
def fonc_1(a):
    from numpy import exp
    u=1
    n=0
    while u<=a:
        u=exp(-u)/u
        n=n+1
    return n
```

- (b) La commande `fonc_2(a)` renvoie le plus petit n tel que $u_n \leq a$.

Par conséquent, les termes $u_0, \dots, u_4$ sont tous compris dans l'intervalle $]10^{-6}; 10^6]$. Par contre, $u_5 \leq 10^{-6}$ et

- (c) Il suffit d'itérer n fois la fonction f , sur le modèle des fonctions `fonc_1` et `fonc_2`, mais avec une boucle `for` au lieu d'une boucle `while`. D'où le programme :

```
from numpy import exp
def suite(n):
    u=[1]
    for k in range(n):
        u.append(exp(-u[k])/u[k])
    return u
```

- (d) On ajoute simplement

```
plt.plot(range(101), suite(100))
plt.show()
```

3. (a) La fonction g est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme différence de fonctions dérivables et pour tout $x \geq 0$, on a $g'(x) = -e^{-x} - 2x = -(e^{-x} + 2x)$. Or, $e^{-x} > 0$ et $2x \geq 0$, donc $g'(x) < 0$. Par conséquent, g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. De plus, g est continue sur cet intervalle (puisque'elle y est dérivable). Donc, par le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $g([0; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x); g(0)]$. Or, on a directement $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ et $g(0) = 1$.

Conclusion : la fonction g réalise une bijection (strictement décroissante) de $[0; +\infty[$ sur $] -\infty; 1]$.

(b) Pour tout $x > 0$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{e^{-x}}{x} = x \\ &\iff e^{-x} = x^2 \\ &\iff e^{-x} - x^2 = 0 \\ &\iff g(x) = 0 \end{aligned}$$

Or, g réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $] -\infty; 1]$, et 0 appartient à l'intervalle image $] -\infty; 1]$. Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$. De plus, $\alpha \neq 0$ car $g(0) \neq 0$.

Donc, d'après les équivalences ci-dessus, l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0; 1[$.

(c) On a $g(1) = e^{-1} - 1$. Or, $e > 2$, donc $e^{-1} < \frac{1}{2}$, donc en particulier $e^{-1} < 1$. Par conséquent, $g(1) < 0$, c'est-à-dire $g(1) < g(\alpha)$. Par décroissance de g sur $[0; +\infty[$, on en déduit que $\alpha < 1$.

De même, $g\left(\frac{1}{e}\right) = \exp\left(\frac{-1}{e}\right) - \exp(-2)$. Or, comme vu ci-dessus, $\frac{1}{e} < 1$, et donc en particulier, $\frac{1}{e} < 2$.

D'où $\frac{-1}{e} > -2$, et donc (par stricte croissance de la fonction exponentielle) : $\exp\left(\frac{-1}{e}\right) > \exp(-2)$.

On en déduit que $g\left(\frac{1}{e}\right) > 0$, c'est-à-dire $g\left(\frac{1}{e}\right) > g(\alpha)$. Et donc, par décroissance de g sur $[0; +\infty[$, on a finalement $\alpha > \frac{1}{e}$.

Conclusion : on a $\frac{1}{e} < \alpha < 1$.

```
(d) def g(x):
    return (np.exp(x)-x**2)

a=1/np.exp(1)
b=1
c=(a+b)/2
while np.abs(g(c))>10**(-3) :
    if g(a)*g(c)>0:
        a=c
    else :
        b=c
    c=(a+b)/2
print(c)
```

4. (a) On a $u_1 = f(u_0) = e^{-1}$. Comme $e > 2$, on en déduit que $u_1 < \frac{1}{2}$. Par conséquent, par stricte décroissance de f sur $]0; +\infty[$, on a $f(u_1) > f\left(\frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire $u_2 > 2e^{-1/2}$.

Or, $e < 4$, donc $e^{1/2} < 2$, donc $e^{-1/2} > \frac{1}{2}$ et donc $2e^{-1/2} > 1$.

Conclusion : on a $u_2 > 1$, c'est-à-dire $u_2 > u_0$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = u_{2n}$, et montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} > v_n$. D'après la question précédente, on a $u_2 > u_0$, soit $v_1 > v_0$. Ainsi, la récurrence est initialisée. Maintenant, soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. On suppose que $v_{n+1} > v_n$ et on montre que $v_{n+2} > v_{n+1}$: Par hypothèse de récurrence, $v_{n+1} > v_n$, soit $u_{2n+2} > u_{2n}$. Par stricte décroissance de f sur $]0; +\infty[$, on en déduit que $f(u_{2n+2}) < f(u_{2n})$, soit $u_{2n+3} < u_{2n+1}$. De même, par stricte décroissance de f , on en déduit alors que $f(u_{2n+3}) > f(u_{2n+1})$, soit $u_{2n+4} < u_{2n+2}$, ou encore : $v_{n+2} > v_{n+1}$, ce qui termine la récurrence.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} > v_n$. Ainsi, la suite (v_n) , c'est-à-dire la suite (u_{2n}) , est strictement

- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $w_n = u_{2n+1}$. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n+2} > u_{2n}$. Par stricte décroissance de f sur $]0; +\infty[$, on en déduit que $f(u_{2n+2}) < f(u_{2n})$, soit $u_{2n+3} < u_{2n+1}$, ou encore : $w_{n+1} < w_n$. Ainsi, la suite (w_n) , c'est-à-dire la suite (u_{2n+1}) , est strictement décroissante. Comme par ailleurs, elle est minorée par 0 ($u_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ d'après la question 1.(b)), on en déduit, par le théorème de la limite monotone que la suite (u_{2n+1}) est convergente.

5. (a) Pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$, donc la composée $h(x) = f(f(x))$ a bien un sens. De plus,

$$\begin{aligned} h(x) &= f(f(x)) \\ &= \frac{e^{-f(x)}}{f(x)} \\ &= \frac{\exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right)}{\frac{e^{-x}}{x}} \\ &= \frac{x \exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right)}{e^{-x}} \end{aligned}$$

Ce qui donne : $h(x) = x e^x \exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right)$.

- (b) D'après la question 1.(a), la fonction f est continue sur $]0; +\infty[$ à valeurs dans $]0; +\infty[$. Par conséquent, $f \circ f$ est continue sur $]0; +\infty[$ comme composée de fonctions continues. Autrement dit, h est continue sur $]0; +\infty[$.

Examinons maintenant la continuité de h (à droite) en 0. D'après la question précédente, on a, pour tout $x > 0$, $h(x) = x e^x \exp(-f(x))$. Or, $f(x) \xrightarrow{x} 0^+ + \infty$, donc $-f(x) \xrightarrow{x} 0^+ - \infty$, donc $\exp(-f(x)) \xrightarrow{x} 0^+ 0$. De plus, $x e^x \xrightarrow{x} 0 0$, donc $h(x) \xrightarrow{x} 0^+ 0$. Autrement dit, $h(x) \xrightarrow{x} 0^+ h(0)$, ce qui établit la continuité de h (à droite) en 0.

Conclusion : la fonction h est continue sur $[0; +\infty[$.

- (c) On sait déjà que 0 est solution de $h(x) = x$ puisque $h(0) = 0$ par définition de $h(0)$. Cherchons maintenant les solutions strictement positives. Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} h(x) = x &\iff x e^x \exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right) = x \quad (\text{question 5.(a)}) \\ &\iff e^x \exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right) = 1 \quad \text{car } x \neq 0 \\ &\iff \exp\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right) = e^{-x} \\ &\iff \frac{-e^{-x}}{x} = -x \quad \text{par injectivité de la fonction } \exp \\ &\iff \frac{e^{-x}}{x} = x \\ &\iff f(x) = x \\ &\iff x = \alpha \quad (\text{question 3.(b)}) \end{aligned}$$

Ainsi, il y a une unique solution strictement positive, qui est α .

Conclusion : l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x , admet exactement deux solutions sur $[0; +\infty[$, qui sont 0 et

- (d) Reprenons les notations de la question 4.(c) : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{2n+1}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_{n+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = h(w_n)$. Notons ℓ la limite de (w_n) (qui existe d'après la question 4.(c)), et passons à la limite dans l'égalité $w_{n+1} = h(w_n)$. On obtient alors, par continuité de h sur $[0; +\infty[$ (cf question 5.(b)) : $\ell = h(\ell)$. Par conséquent, d'après la question précédente, $\ell = 0$ ou $\ell = \alpha$.

Montrons que $\ell \neq \alpha$. Le premier terme de la suite (w_n) est $w_0 = u_1 = f(u_0) = f(1)$. Or, comme $\alpha < 1$ (cf question 3.(c)), on a, par stricte décroissance de f : $f(\alpha) > f(1)$, soit $\alpha > w_0$. Ainsi, la suite (w_n) est strictement décroissante (cf question 4.(c)), et de premier terme strictement inférieur à α . Elle ne peut pas converger vers α . Par conséquent, ℓ est nécessairement égal à 0.

Conclusion : la suite (u_{2n+1}) converge vers 0.

6. La suite (u_{2n}) est croissante (cf question 4.(b)). Donc, par le théorème de la limite monotone : soit elle est majorée, et dans ce cas elle converge, soit elle ne l'est pas, et dans ce cas diverge vers $+\infty$.

Par l'absurde, supposons qu'on soit dans le premier cas (suite majorée et convergente). Notons ℓ' sa limite. De même qu'à la question précédente, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(f(u_{2n})) = h(u_{2n})$. D'où, en passant à la limite : $\ell' = h(\ell')$, et donc (cf question 5.(c)) $\ell' = 0$ ou $\ell' = \alpha$.

Or, (u_{2n}) est croissante, de premier terme u_0 , qui est strictement supérieur, à la fois à 0 et à α . Elle ne peut donc pas converger, ni vers 0, ni vers α , ce qui contredit ce qui précède. On n'est donc pas dans le cas où (u_{2n}) est majorée et convergente.

Conclusion : la suite (u_{2n}) n'est pas majorée, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = +\infty$.

Remarque : les résultats des 2 questions précédentes confirment le commentaire effectué à la question 2.(b).

Exercice n°2 - EML 2014

On considère l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que (A, B, C) est une base de $\mathcal{E}$.
2. Etablir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est à dire :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, MN \in \mathcal{E}$$

3. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

Pour toute matrice de $\mathcal{E}$, on note $f(M) = TMT$.

4. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.
5. Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{E}$.
6. (*) Est-ce que T est diagonalisable ?

On note F la matrice de f dans la base (A, B, C) de $\mathcal{E}$.

7. Calculer $f(A), f(B), f(C)$ en fonction de (A, B, C) et en déduire F .
8. (a) (*) Montrer que f admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci, puis déterminer une base et la dimension du sous-espace propre pour f associé à cette valeur propre.
- (b) (*) Est-ce que f est diagonalisable ?
- (c) (*) Soit λ un réel différent de 1. Résoudre l'équation $f(M) = \lambda M$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Calculer H^2 , puis pour tout a de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, $(I + aH)^n$.
10. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, F^n .
11. Trouver une matrice G de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$. Existe-t-il un endomorphisme g de $\mathcal{E}$ tel que $g \circ g \circ g = f$?

1. Les matrices de $\mathcal{E}$ s'écrivent toutes $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de façon unique en fonction de A, B et C .

Donc $\mathcal{E} = Vect(A, B, C)$ et (A, B, C) est une base de $\mathcal{E}$, qui est donc de dimension 3.

2. Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}$ alors $MN = \begin{pmatrix} aa' & ab' + bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix}$ est une matrice qui appartient encore à $\mathcal{E}$.

3. Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ alors M est inversible si, et seulement si, $a \neq 0$ et $c \neq 0$ et on alors par la méthode de Gauss : $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$.

4. $\mathcal{E}$ est stable par multiplication donc, comme T et M appartiennent à $\mathcal{E}$, on a aussi $f(M) = TMT \in \mathcal{E}$.

Reste à vérifier la linéarité : si M et N sont 2 matrices de $\mathcal{E}$ et x et y 2 réels :

$$f(xM + yN) = T(xM + yN)T = T(xM)T + T(yN)T = xTMT + yTNT = xf(M) + yf(N).$$

F est donc bien un endomorphisme de $\mathcal{E}$!

5. T est une matrice inversible car triangulaire avec 2 pivots non nuls. De plus, si M et N sont 2 matrices de $\mathcal{E}$, on a : $f(M) = N \iff TMT = N \iff M = T^{-1}NT^{-1}$, ce qui montre que toute matrice N de $\mathcal{E}$ admet unique antécédent par f , qui est donc un automorphisme de $\mathcal{E}$.

6. T étant triangulaire, ses valeurs propres se trouvent sur sa diagonale et donc l'unique valeur propre de T est 1.

Comme d'habitude (?) : si T était diagonalisable, il y aurait une matrice P inversible telle que $P^{-1}TP = I$ et on aurait donc $T = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$.

Comme $T \neq I$, T ne peut pas être inversible.

$$7. f(A) = TAT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A + B;$$

$$f(B) = TBT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

$$\text{et } f(C) = TCT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B + C.$$

La matrice de f dans la base (A, B, C) est donc : $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. Un réel λ est valeur propre de f ssi la matrice $F - \lambda I$ n'est pas inversible. Une réduction de Gauss donne

$$F - \lambda I \sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \quad (\text{on a permuté})$$

d'abord les lignes 1 et 2, ensuite les colonnes 1 et 2, ce qui ne change pas l'inversibilité de la matrice).

Par suite, la seule valeur propre de f est celle qui annule $1 - \lambda$, soit donc $\lambda = 1$. Une matrice $M = aA + bB + cC$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre ssi, $f(M) = M$ qui se traduit matriciellement

$$\text{par : } F \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ d'où le système } \begin{cases} a = a \\ a + b + c = b \\ c = c \end{cases} \iff \{a + c = 0 \iff$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

L'espace propre associé à $\lambda = 1$ est donc $E_1 = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

9. 1 est la seule valeur propre de f et $\dim(E_1) = 2 \neq 3$, donc f n'est pas diagonalisable.
remarque : 1 étant la seule valeur propre de f et $f \neq id_E$, on aurait pu raisonner par l'absurde, comme au 6.

10. Si $\lambda \neq 1$, λ n'est pas valeur propre de f et donc $f(M) = \lambda M \iff M = 0$.

11. Facile de voir que $H^2 = 0$. Et comme I et H commutent, la formule du binôme donne :

$$(I + aH)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (aH)^k I^{n-k} = \binom{n}{0} (aH)^0 + \binom{n}{1} (aH)^1 + 0 = I + naH = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ na & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Pour $a = 1 : F^n = (I + H)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

13. On aimerait bien trouver a pour que $(I + aH)^3 = F$ et donc que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3a & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La solution

$a = 1/3$ saute aux yeux!!

Une solution cherchée est donc $G = I + \frac{1}{3}H$.

Pour que $g^3 = f$, il suffit de choisir l'endomorphisme g de E dont la matrice dans la base (A, B, C) est G .

Exercice n°3 - EML 2024

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N , et on effectue une succession illimitée de tirages d'une boule avec remise dans l'urne. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire indiquant le numéro de la boule obtenue au k -ième tirage.

Pour tout entier $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$, on note T_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir i numéros distincts, ainsi $T_i = k$ si on a obtenu i numéros distincts lors des k premiers tirages, mais seulement $i - 1$ numéros distincts lors des $k - 1$ premiers tirages.

Exemple : on suppose $N = 4$, si les huit premiers tirages donnent

i	1	2	3	4	5	6	7	8
X_i	2	3	3	3	1	2	1	4

alors $T_1 = 1, T_2 = 2, T_3 = 5$ et $T_4 = 8$.

Partie A : Simulation informatique

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Reconnaître la loi de X_k .
- Le programme en langage Python ci-dessous définit une fonction `ajout` qui prend en argument une liste L et un entier x .

```
def ajout(L, x):
    if (x in L) == False :
        L.append(x)
```

Expliquez succinctement comment et à quelle condition l'exécution de la commande `ajout(L, x)` modifie la liste L .

- Recopier et compléter la fonction Python `Simul_T` ci-dessous.
 Cette fonction prend en argument deux entiers $N \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$. Elle a pour but de simuler la variable aléatoire T_i . Dans le script nous notons :

- L la liste sans répétition des numéros sortis lors des tirages effectués ;
- k le rang du tirage en cours ;
- x le résultat du tirage en cours.

```
import numpy.random as rd
def Simul_T(N, i):
    L = []
    k = 0
    while ... :
        x = rd.randint(1, N+1)
        ajout(L, x)
        k = ...
    return (...)
```

4. On suppose $N = 3$.

Rédiger un programme Python qui calcule et affiche la moyenne de 100 réalisations de $\text{Simul_T}(3, 2)$. Que représente le résultat obtenu par rapport à la variable aléatoire T_2 ?

Partie B : Étude de T_2 dans le cas d'une urne contenant trois boules

Dans cette partie on suppose $N = 3$, ainsi l'urne contient exactement trois boules numérotées 1, 2 et 3 .

- Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire T_2 .
- Soit $k \geq 2$ un entier fixé.
 - Décrire l'évènement $(T_2 = k) \cap (X_1 = 1)$ à l'aide des évènements $(X_j = 1)$ et $(X_j \neq 1)$ avec $j \in \mathbf{N}^*$.
 - En déduire $P((T_2 = k) \cap (X_1 = 1))$.
 - Montrer que $P(T_2 = k) = \frac{2}{3^{k-1}}$.
- Justifier que T_2 admet une espérance et la calculer.
- Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z_2 = T_2 - 1$.
Reconnaître une loi usuelle, retrouver l'espérance de T_2 et donner sa variance.

Partie C : Quelques résultats dans le cas général

On retourne au cas général, l'urne contient N boules numérotées de 1 à N .

Pour tout $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$, on note Z_i la variable aléatoire définie par :

$$\begin{cases} Z_1 = 1 & \text{si } i = 1 \\ Z_i = T_i - T_{i-1} & \text{si } i \geq 2 \end{cases}$$

La variable aléatoire Z_i donne le nombre de tirages nécessaires, après le T_{i-1} -ième tirage, pour obtenir un numéro distinct des $i - 1$ numéros déjà tirés.

On admet que les variables aléatoires $Z_1, \dots, Z_N$ sont indépendantes.

Décomposition de T_i

- Soit $i \in \llbracket 2; N \rrbracket$.
 - Justifier que Z_i suit la loi géométrique de paramètre $\frac{N - i + 1}{N}$.
 - Exprimer $E(Z_i)$ et $V(Z_i)$ en fonction de i et N . Vérifier que ces formules restent vraies pour $i = 1$.
 - Soit $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$. Exprimer T_i comme somme de $Z_1, \dots, Z_i$.

Loi de T_3

10. (a) Calculer $P((Z_2 = \ell) \cap (Z_3 = k))$ pour tous ℓ et k dans $\mathbf{N}^*$.

(b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$P(Z_2 + Z_3 = n) = \frac{(N-1)(N-2)}{2} \left(\left(\frac{2}{N} \right)^n - \frac{2}{N^n} \right).$$

(c) Déterminer la loi de T_3 .

Espérance et covariance

11. Soit $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$, montrer que $E(T_i) = N \sum_{k=N-i+1}^N \frac{1}{k}$.

12. (*) Soient i et j deux entiers tels que $1 \leq i \leq j \leq N$, montrer que

$$\text{cov}(T_i, T_j) = V(T_i)$$

où $\text{cov}(T_i, T_j)$ désigne la covariance de T_i et T_j .

1. La variable aléatoire X_k suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; N \rrbracket$.

2. Si la liste L contient déjà $\mathbf{x}$, alors l'exécution de la commande `ajout(L, x)` ne modifie pas L . Si la liste L ne contient pas $\mathbf{x}$, alors l'exécution de la commande `ajout(L, x)` ajoute une nouvelle composante égale à $\mathbf{x}$ à la fin de L .

3. `import numpy.random as rd`

```
def Simul_T(N, i):  
    L = []  
    k = 0  
    while len(L) < i :  
        x = rd.randint(1, N+1)  
        ajout(L, x)  
        k = k + 1  
    return(k)
```

4. `S = 0`
`for i in range(100):`
 `S = S + Simul_T(3, 2)`
`print(S/100)`

Selon la loi des grands nombres, le nombre affiché est une approximation de l'espérance $E(T_2)$.

5. L'ensemble des valeurs possibles de T_2 est $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. En effet, on ne peut obtenir deux numéros distincts qu'en au moins deux tirages.

6. (a) Si $(X_1 = 1)$ alors la première boule tirée porte le numéro 1, et si $T_2 = k$ alors les $k - 1$ premières boules tirées portent toutes le même numéro, ainsi :

$$(T_2 = k) \cap (X_1 = 1) = (X_1 = 1) \cap \dots \cap (X_{k-1} = 1) \cap (X_k \neq 1).$$

(b) Les tirages s'effectuant avec remise, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_k$ sont indépendantes, d'où

$$\begin{aligned} P((T_2 = k) \cap (X_1 = 1)) &= P((X_1 = 1) \cap \dots \cap (X_{k-1} = 1) \cap (X_k \neq 1)) \\ &= P(X_1 = 1) \times \dots \times P(X_{k-1} = 1) \times P(X_k \neq 1) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \times \frac{2}{3} \\ &= \boxed{\frac{2}{3^k}} \end{aligned}$$

(c) On applique la formule des probabilités totales avec le système $\{(X_1 = 1), (X_1 = 2), (X_1 = 3)\}$:

$$P(T_2 = k) = P((T_2 = k) \cap (X_1 = 1)) + P((T_2 = k) \cap (X_1 = 2)) + P((T_2 = k) \cap (X_1 = 3)).$$

Or, les trois probabilités de cette somme sont égales puisque les numéros 1, 2 et 3 jouent des rôles symétriques. Ainsi, en utilisant le résultat de la question précédente, on trouve :

$$P(T_2 = k) = 3 \times P((T_2 = k) \cap (X_1 = 1)) = 3 \times \frac{2}{3^k} = \boxed{\frac{2}{3^{k-1}}}.$$

7. La variable aléatoire T_2 admet une espérance si la série ci-dessous converge absolument,

$$\sum_{k \geq 2} k P(T_2 = k) = 2 \sum_{k \geq 2} k \frac{1}{3^{k-1}}.$$

La série géométrique dérivée $\sum_{k \geq 2} k \frac{1}{3^{k-1}}$ est convergente car $\frac{1}{3} \in]-1; 1[$, et même absolument convergente car à termes positifs. On en déduit que T_2 admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned} E(T_2) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k P(T_2 = k) \\ &= 2 \sum_{k=2}^{+\infty} k \frac{1}{3^{k-1}} \\ &= 2 \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{1}{3^{k-1}} - 1 \right) \quad (\text{on modifie le premier indice}) \\ &= 2 \left(\frac{1}{(1 - \frac{1}{3})^2} - 1 \right) \\ &= 2 \left(\frac{9}{4} - 1 \right) \\ &= \boxed{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

8. La variable aléatoire Z_2 est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(Z_2) = P(T_2 - 1 = k) = P(T_2 = k + 1) = \frac{2}{3^k} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$$

La variable aléatoire Z_2 suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{2}{3}$.

Ainsi Z_2 admet une espérance et une variance données par $E(Z_2) = \frac{1}{p} = \frac{3}{2}$ et $V(Z_2) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{3}{4}$. On en déduit que $T_2 = Z_2 + 1$ admet aussi une espérance et une variance, on trouve :

- par linéarité de l'espérance $E(T_2) = E(Z_2 + 1) = E(Z_2) + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \boxed{\frac{5}{2}}$.
- par effet d'une transformation affine sur la variance $V(T_2) = V(Z_2 + 1) = V(Z_2) = \boxed{\frac{3}{4}}$.

9. (a) À partir du T_i -ième tirage, on considère chaque tirage est une épreuve de Bernoulli dont le succès est « obtenir l'un des $N - (i - 1)$ numéros qui ne sont pas déjà sortis ». La variable aléatoire Z_i donne alors le rang du premier succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même probabilité de succès $\frac{N - i + 1}{N}$, par conséquent $\boxed{Z_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{N - i + 1}{N}\right)}$.

(b) On a : $\boxed{E(Z_i) = \frac{N}{N - i + 1}}$ et $V(Z_i) = \frac{i - 1}{N} \times \left(\frac{N}{N - i + 1}\right)^2 = \boxed{\frac{N(i - 1)}{(N - i + 1)^2}}$.

Sachant que $Z_1 = 1$ de manière certaine, on a $E(Z_1) = 1$ et $V(Z_1) = 0$, ce qui correspond aux résultats des formules ci-dessus en prenant $i = 1$.

(c) On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^i Z_k &= Z_1 + \sum_{k=2}^i Z_k \\ &= T_1 + \sum_{k=2}^i T_k - T_{k-1} \quad (\text{car } Z_1 = T_1) \\ &= T_1 + (T_i - T_1) \quad (\text{par télescopage}) \\ &= T_i. \end{aligned}$$

10. (a) Soient $k \geq 1$ et $\ell \geq 1$ deux entiers, par indépendance de Z_2 et Z_3 on a :

$$\begin{aligned} P((Z_2 = \ell) \cap (Z_3 = k)) &= P(Z_2 = \ell) \times P(Z_3 = k) \\ &= \left(\frac{1}{N}\right)^{\ell-1} \times \frac{N-1}{N} \times \left(\frac{2}{N}\right)^{k-1} \times \frac{N-2}{N} \\ &= \boxed{2^{k-1} \frac{(N-1)(N-2)}{N^{\ell+k}}}. \end{aligned}$$

(b) Soit $n \geq 2$, on décompose $(Z_2 + Z_3 = n)$ en une union d'évènements incompatibles :

$$(Z_2 + Z_3 = n) = \bigcup_{k=1}^{n-1} (Z_2 = n - k) \cap (Z_3 = k).$$

Il s'ensuit :

$$\begin{aligned} P(Z_2 + Z_3 = n) &= \sum_{k=1}^{n-1} P((Z_2 = n - k) \cap (Z_3 = k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} \frac{(N-1)(N-2)}{N^n} \quad (\text{question précédente}) \\ &= \frac{(N-1)(N-2)}{N^n} \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} \\ &= \frac{(N-1)(N-2)}{N^n} \sum_{\ell=0}^{n-2} 2^\ell \quad (\text{en posant } \ell = k - 1) \\ &= \frac{(N-1)(N-2)}{N^n} (2^{n-1} - 1) \\ &= \frac{(N-1)(N-2)}{2} \left(\left(\frac{2}{N}\right)^n - \frac{2}{N^n} \right) \end{aligned}$$

(c) La variable aléatoire T_3 est à valeurs dans $\llbracket 3; +\infty \rrbracket$. Soit $n \geq 3$, d'après la question 9c :

$$\begin{aligned} P(T_3 = n) &= P(Z_1 + Z_2 + Z_3 = n) \\ &= P(Z_2 + Z_3 = n - 1) \\ &= \frac{(N-1)(N-2)}{2} \left(\left(\frac{2}{N} \right)^{n-1} - \frac{2}{N^{n-1}} \right). \end{aligned}$$

11. Par linéarité on trouve :

$$\begin{aligned} E(T_i) &= E\left(\sum_{k=1}^i Z_k\right) \quad (\text{question 9c}) \\ &= \sum_{k=1}^i E(Z_k) \quad (\text{linéarité}) \\ &= \sum_{k=1}^i \frac{N}{N-k+1} \quad (\text{question 9b}) \\ &= N \sum_{j=N-i+1}^N \frac{1}{j} \quad (\text{avec le changement d'indice } j = N - k + 1). \end{aligned}$$

12. Si $j = i$, on a $\text{cov}(T_i, T_j) = \text{cov}(T_i, T_i) = V(T_i)$.

Si $j > i$, en sommant par paquets on trouve :

$$T_j = \sum_{k=1}^j Z_k = \sum_{k=1}^i Z_k + \sum_{k=i+1}^j Z_k = T_i + \sum_{k=i+1}^j Z_k.$$

En appliquant la bilinéarité :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(T_i, T_j) &= \text{Cov}\left(T_i, T_i + \sum_{k=i+1}^j Z_k\right) \\ &= \text{Cov}(T_i, T_i) + \text{Cov}\left(T_i, \sum_{k=i+1}^j Z_k\right) \\ &= \text{Cov}(T_i, T_i) + \sum_{k=i+1}^j \text{Cov}(T_i, Z_k). \end{aligned}$$

Par le lemme des coalitions, la variable aléatoire T_i est indépendante des variables aléatoires $Z_{i+1}, \dots, Z_n$. Ainsi $\text{Cov}(T_i, Z_j) = 0$ pour tout $j \in \llbracket i+1 ; N \rrbracket$, d'où

$$\boxed{\text{Cov}(T_i, T_j) = \text{Cov}(T_i, T_i) = V(T_i)}.$$