

Couples de variables aléatoires discrètes.

Dans tout ce chapitre, les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

I. Loi d'un couple

Définition 1.1

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
La loi du couple (X, Y) est la donnée des réels $P([X = i] \cap [Y = j])$ pour tout couple $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Remarque :

Cette loi jointe du couple (X, Y) est l'application :

$$P : \begin{array}{cc} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \rightarrow [0, 1] \\ (i, j) & \mapsto P([X = i] \cap [Y = j]) \end{array}$$

On dit aussi loi conjointe du couple, ou tout simplement loi de (X, Y) .

Exemple :

On lance deux pièces non truquées et de couleurs distinctes. On note X_1 la variable qui vaut 1 si la première pièce tombe sur Pile, et X_2 qui vaut 1 lorsque la deuxième tombe sur Pile. On peut étudier le couple de variables aléatoires (X_1, X_2) . On a alors $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{0, 1\}$. La loi du couple est la donnée des quatre réels suivants :

$$\begin{array}{ll} P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \frac{1}{4} & P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) = \frac{1}{4} \\ P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]) = \frac{1}{4} & P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = \frac{1}{4} \end{array}$$

qui peuvent s'écrire sous forme de tableau

X_1/X_2			loi de X_1
loi de X_2			

(exemple1)

Exemple :

On lance deux dés de couleurs différentes, et on note D_1 le résultat du premier dé, D_2 celui du deuxième. On peut étudier le couple de variables aléatoires (D_1, D_2) . On a alors $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$ et la loi de probabilité du couple est donnée par

$$\forall i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \quad \forall j \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \quad P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \frac{1}{36}$$

Exemple :

Dans une urne se trouve trois billes, numérotées de 1 à 3. On effectue trois tirages successifs avec remise et on note la valeur de la bille. On note m la variable donnant le minimum des trois valeurs, et M la maximum. On étudie la loi du couple (m, M) . On a $m(\Omega) = M(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ et nous devons calculer, une à une (pour le moment) toutes les probabilités suivantes :

$$\begin{aligned}P([m = 1] \cap [M = 1]) &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\P([m = 2] \cap [M = 2]) &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\P([m = 3] \cap [M = 3]) &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\P([m = 1] \cap [M = 2]) &= 3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\P([m = 2] \cap [M = 1]) &= 0 \\&\vdots \\&\vdots\end{aligned}$$

Combien y-a-t'il de calculs à faire ? Justifier les réponses.

Notation : À la place de $P([X = i] \cap [Y = j])$ on peut noter $P(X = i, Y = j)$ ou $P([X = i], [Y = j])$.



Méthode :

Pour obtenir la loi du couple (X, Y) :

- on commence par déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
- on donne, pour tout $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P(X = i, Y = j)$

Remarque :

Dans le cas où $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis et de cardinaux petits on pourra résumer la loi jointe dans un tableau à double entrée.



Attention:

En toute généralité

$$P(X = i, Y = j) \neq P(X = i) P(Y = j)$$

On peut parfois utiliser la formule des probabilités composées

$$P(X = i, Y = j) =$$

Type Concours

On lance une pièce qui, à chaque lancer, donne *Pile* avec probabilité p , $p \in]0, 1[$. On note X le rang d'apparition du premier *Pile*, Y , le rang d'apparition du premier *Face*, et Z le rang d'apparition du second *Pile*.

1. Déterminer la loi conjointe de (X, Z) .
2. Déterminer la loi conjointe de (X, Y) .

Proposition 1.2

- La famille $([X = i] \cap [Y = j])_{(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements.
- La série double $\sum_{(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$ est convergente et sa somme est égale à 1.

Remarque :

On a la relation :

$$\sum_{i \in X(\Omega)} \sum_{j \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{j \in Y(\Omega)} \sum_{i \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = i, Y = j)$$

Exercice 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé ainsi que X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1; n+1 \rrbracket$. On suppose qu'il existe un réel a tel que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket^2, \quad \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = a \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}.$$

Déterminer la valeur de a

II. Lois marginales**Définition 2.1**

- La première loi marginale du couple (X, Y) est la loi de la variable X .
- La seconde loi marginale du couple (X, Y) est la loi de la variable Y .

**Méthode :**

Soit (X, Y) un couple de variable aléatoires discrètes dont on connaît la loi conjointe.

- On obtient la loi de X grâce à la formule des probabilités totales, avec le S.C.E

$$\forall \square \in X(\Omega), P(X = \square) =$$

- On obtient la loi de Y grâce à la formule des probabilités totales, avec le S.C.E

$$\forall \nabla \in Y(\Omega), P(Y = \nabla) =$$

Exercice 2

Après avoir vérifié que le tableau suivant décrit bien une loi conjointe, trouver les lois marginales de X et Y .

X/Y	1	2	3	loi de X
1	1/6	1/6	1/6	
2	1/12	0	1/18	
3	1/12	1/6	2/18	
loi de Y				1



Attention:

Dans le cas où les variables aléatoires ne sont pas finies, les sommes sont des séries à termes positifs qui convergent.

Exercice 3

Déterminer les lois marginales des variables X et Y définies dans l'exercice 1.

Type Concours

Donner les lois marginales des variables aléatoires X et Z de l'exercice type concours précédent.

III. Lois conditionnelles

Définition 3.1 — Lois conditionnelles

- Soit $j \in Y(\Omega)$ telle que $P(Y = j) \neq 0$.
On définit la loi conditionnelle de X sachant $[Y = j]$ comme l'application :

$$\begin{array}{lcl} X(\Omega) & \rightarrow & [0, 1] \\ i & \mapsto & P_{(Y=j)}(X = i) \end{array}$$

- Soit $i \in X(\Omega)$ telle que $P(X = i) \neq 0$.
On définit la loi conditionnelle de Y sachant $[X = i]$ comme l'application :

$$\begin{array}{lcl} Y(\Omega) & \rightarrow & [0, 1] \\ j & \mapsto & P_{(X=i)}(Y = j) \end{array}$$



Méthode :

Pour déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[Y = j]$:

1. On détermine $X(\Omega)$.
2. On détermine, pour tout $i \in X(\Omega)$, $P_{(Y=j)}(X = i)$.



Méthode :

Pour obtenir une loi conditionnelle, on peut :

- Si on connaît la loi du couple, on utilise la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$\forall i \in X(\Omega), P_{Y=j}(X = i) =$$

- Si on ne connaît pas la loi du couple, on peut souvent reconnaître la loi conditionnelle dans l'énoncé.

Exercice 4

On s'intéresse à une chaîne de production d'une pièce automobile mise en place par un constructeur. On estime que 10% des pièces produites sont défectueuses. On suppose que le nombre de pièces produites en une heure est une variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 10$. On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de pièces défectueuses produites en une heure.

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$.
2. En déduire la loi de Y .

Exercice 5

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n . Pour chaque $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'urne k contient des boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à k .

On choisit une urne au hasard et on pioche une boule dans cette urne. On note X le numéro de l'urne choisie et Y le numéro de la boule piochée.

1. Reconnaître la loi de X . Rappeler la valeur de $E(X)$.
2. Pour tout $k \in X(\Omega)$, déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.
3. En déduire la loi marginale de Y . On exprimera le résultat sous forme d'une somme qu'on ne cherchera pas à calculer.
4. Calculer $E(Y)$.
5. Ecrire une fonction Python d'en tête `def simul_XY(n)` qui renvoie une simulation du couple (X, Y) .

Exercice 6

On lance une pièce donnant pile avec probabilité $p \in]0; 1[$. On note X le rang d'apparition du premier pile et, si ce premier pile arrive au rang n , on note Y le nombre de faces obtenus lors de n lancers supplémentaires.

1. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$.
2. Préciser $Y(\Omega)$ puis montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(Y = k) = \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} \binom{n}{k} (pq)^n$$

Remarque :

De la loi conditionnelle à la loi marginale :

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et telles que pour tout $j \in Y(\Omega)$ on a $P(Y = j) \neq 0$. Comme la famille est un S.C.E, d'après la formule des probabilités totales

$$\forall i \in X(\Omega), \quad P(X = i) =$$

De même, si pour tout $i \in X(\Omega)$ on a $P(X = i) \neq 0$, la formule des probabilités totales donne

$$\forall j \in Y(\Omega), \quad P(Y = j) =$$

IV. Indépendance de variables aléatoires

Définition 4.1

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. On dit que X et Y sont indépendantes si et seulement si



Méthode :

Montrer que des variables sont mutuellement indépendantes.

1. Si l'énoncé précise que les deux variables aléatoires sont indépendantes, ou si c'est sous-entendu ("deux dés lancés", "tirages avec remise..."). Alors il faut utiliser la relation de la définition pour faire des calculs.
2. L'énoncé introduit deux variables aléatoires discrètes, et demande (éventuellement après plusieurs calculs) si ces deux variables aléatoires sont indépendantes ou non. Il faut alors vérifier si les égalités

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = P(X = i)P(Y = j)$$

sont vérifiées pour tout couple (i, j) dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Pour montrer que deux variables **ne sont pas indépendantes**, il suffit de trouver un contre-exemple à la relation précédente. On cherche alors souvent des événements $[X = i]$ et $[Y = j]$ de probabilités non nulles tels que $[X = i] \cap [Y = j]$ soit impossible.

Exemple :

On lance deux dés non truqués. On note X le minimum des deux résultats et Y le maximum des deux résultats. Montrer que X et Y ne sont pas indépendants.

On note X_i la variable donnant le résultat du i ème dé.

Par exemple $[Y = 1] = [X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]$ donc $P(Y = 1) = \left(\frac{1}{6}\right)^2$. De même $[X = 6] = [X_1 = 6] \cap [X_2 = 6]$

donc $P(X = 6) = \left(\frac{1}{6}\right)^2$.

Mais $[X = 6] \cap [Y = 1] = \emptyset$ donc $P([X = 6] \cap [Y = 1]) \neq P([X = 6])P([Y = 1])$.

Définition 4.2

- Soient $n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes.

On dit que les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes lorsque :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k = x_k]\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}([X_k = x_k])$$

- Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes.

On dit que la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

Type Concours

On considère une suite (X_n) de variables mutuellement indépendantes de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On note $Z_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $j \in \mathbb{N}$, montrer que $P(X_j > k) = (1 - p)^k$.

- Justifier que $P(Z_n > k) = P\left(\bigcap_{j=1}^n [X_j > k]\right)$.

- En déduire la loi de Z_n .

Lemme 4.3 — Lemme des coalitions

- Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors toute variable aléatoire fonction de X est indépendante de toute variable aléatoire fonction de Y .
- Soient $n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes.

Si les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors pour tout $p \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$, toute variable aléatoire fonction des $X_1, \dots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des $X_{p+1}, \dots, X_n$.

Exemple :

- Si X_1, X_2, X_3 sont mutuellement indépendantes, alors X_1 est indépendante de $X_2 + X_3$, X_2^2 est indépendante de $\min(X_1, X_3)$.
- Si X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes, alors X et Y ne le sont pas non plus.

V. Exemples classiques.

V. 1 Rang d'apparition du second succès

On lance un dé indéfiniment. On note X le rang d'apparition du premier 6 et Y le rang d'apparition du second 6.

On note $r = \frac{1}{6}$ et $q = 1 - r$. S_k est l'événement « on obtient 6 au tirage k » et $E_k = \overline{S_k}$

On sait que X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(r)$.

On voit aussi que $Y(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. Déterminer la loi marginale de Y .
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = i]$.

V. 2 Une urne variable

On choisit un entier naturel selon la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Si cet entier est k on remplit l'urne avec k boules rouges et une boule noire. On mélange les boules l'urne et on tire une bille. On gagne si la bille est noire.

On note X la variable aléatoire liée au nombre entier choisi avec la loi de Poisson, et Y la variable aléatoire liée au succès : $Y = 1$ si la bille tirée est noire $Y = 0$ sinon.

1. Calculer la probabilité de gagner.
2. Calculer la loi (conjointe) du couple (X, Y) .

VI. Calculs d'espérances

VI. 1 Théorème de transfert

Le théorème de transfert est aussi valide pour les couples de variables aléatoires discrètes. Il permet de calculer l'espérance d'une variable aléatoire de la forme $Z = g(X, Y)$ sans connaître la loi de Z , mais uniquement à partir de la loi du couple (X, Y) .

Théorème 6.1

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes et $g : (x, y) \mapsto g(x, y)$ une fonction définie sur l'ensemble $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Alors

$$E(g(X, Y)) = \sum_{(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$$

sous réserve que cette dernière série converge absolument.

Remarque :

- Si X et Y sont à supports finis, il n'y a pas de problème de convergence, puisqu'il s'agit d'une somme (double) finie.
- Si au moins l'une des deux est à support infini, l'existence de l'espérance est conditionnée à la convergence absolue. Dans les sujets de concours, soit les questions vous guident vers la justification de l'existence d'une telle somme, soit la convergence absolue est admise.

Exercice 7

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{U}([1, 6])$ avec $n \geq 3$.

1. Calculer $E(|X - Y|)$.
2. Donner une situation réelle (par exemple un jeu) pour lequel $|X - Y|$ à un sens concret.

Exercice 8

Soient deux variables aléatoires discrètes X et Y telles que :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}; \quad \forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) = \frac{j+k}{2^{j+k} j! k!}$$

1. Pourquoi peut-on dire que les deux lois marginales sont les mêmes ?
2. Justifier que la variable aléatoire 2^{X+Y} admet une espérance et la déterminer.

VI. 2 Espérance d'une somme**Proposition 6.2**

Soit $(X_1, X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires discrètes admettant une espérance, et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, alors

$$E(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n) =$$

Exercice 9

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ des variables aléatoires discrètes de même loi admettant une espérance μ . Déterminer l'espérance de $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

VI. 3 Espérance d'un produit**Remarque :**

Soit (X, Y) un couple de variable aléatoires discrètes. Alors le théorème de transfert donne, sous réserve de convergence absolue,

$$E(XY) =$$

Proposition 6.3

1. Si X et Y sont indépendantes et admettent une espérance, alors la variable aléatoire XY admet une espérance et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
2. Si $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une espérance, alors pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\prod_{k=1}^n X_k$ admet une espérance et $\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n X_k\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k)$.

Remarque :

Le théorème précédent peut servir notamment à montrer que deux variables ne sont pas indépendantes. Il suffit de vérifier que $E(XY) \neq E(X)E(Y)$.

**Attention:**

La réciproque est fausse !

Démonstration.

□