

Les basiques



EXERCICE 1

Le couple de variable aléatoires (X, Y) a pour loi conjointe

X/Y	1	2	3	
1	$1/5$	$1/5$	α	
2	$1/10$	$1/10$	$1/20$	
3	$1/5$	0	$1/10$	

1. Trouver la valeur de α pour que l'on ait bien une loi de probabilité.
2. Calculer les lois marginales de X et Y .
3. Calculer la loi de X sachant $[Y = 1]$
4. Les variables aléatoires sont-elles indépendantes ?



EXERCICE 2

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par

$$P(X = -1) = \frac{1}{6} \quad P(X = 0) = \frac{1}{2} \quad P(X = 1) = \frac{1}{12} \quad P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

On note $Y = X^2$.

1. Calculer la loi du couple (X, Y)
2. X et Y sont-elles indépendantes ?



EXERCICE 3

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n . L'urne k contient k billes numérotées de 1 à k . On choisit une urne au hasard et on tire une boule au hasard dans cette urne.

On note X le numéro de l'urne choisie et Y le numéro de la bille tirée.

1. L'énoncé nous donne de façon implicite deux probabilités, dont une conditionnelle. Lesquelles ?
2. Calculer la loi du couple (X, Y)
3. En déduire la loi de Y .
4. Calculer $P(X = Y)$
5. X et Y sont-elles des variables aléatoires indépendantes ?



EXERCICE 4

Soient X et Y deux variables aléatoires dont on suppose que la loi du couple est donnée par le tableau

Y	1	2	3
1	2β	3β	3β
2	3β	2β	3β
3	3β	3β	2β

1. Déterminer la valeur du réel β pour que ce tableau représente effectivement la loi d'un couple.
2. Expliciter les lois marginales de X et Y . En déduire la valeur de $E(X)$ et $E(Y)$.
3. Calculer $E(XY)$.
4. (*) Vérifier que $\text{Cov}(X, Y) = -\frac{1}{12}$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Les classiques



EXERCICE 5

Les clients d'un supermarché ont chacun une probabilité $p \in]0, 1[$ de payer avec une carte bancaire.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de clients en une journée et Y le nombre de personnes qui payent par carte bancaire en une journée. On admet que X et Y sont deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et que $X \leftrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

1. Rappeler les propriétés de la loi de Poisson.
2. Interpréter l'énoncé pour obtenir $P_{(X=k)}(Y = i)$
3. En déduire la loi marginale de Y .
4. Y admet-elle une espérance ? Si oui la calculer.



EXERCICE 6

On suppose que X et Y sont indépendantes et suivent une même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $Z = X + Y$.

1. Compléter et démontrer la formule suivante pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$[Z = n] = \bigcup_{k=\dots}^{\dots} [X = k] \cap [Y = \dots]$$

2. En déduire la loi de Z

**EXERCICE 7**

On suppose que X et Y sont indépendantes et que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ où λ et μ sont deux réels strictement positifs.

On pose $Z = X + Y$

1. Compléter et démontrer la formule suivante pour $n \in \mathbb{N}$

$$[Z = n] = \bigcup_{k=\dots}^{\dots} [X = k] \cap [Y = \dots]$$

2. En déduire que

$$P(Z = n) = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^n \lambda^k \mu^{n-k} \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Simplifier ce résultat en utilisant la formule du binôme de Newton.

3. Quelle est la loi de Z ?

**EXERCICE 8**

Soit n un entier non nul fixé. On choisit au hasard et indépendamment deux nombres dans $[[1, n]]$.

On note X et Y les variables aléatoires désignant ces nombres et on suppose qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ représentant cette expérience.

On note $M = \max(X, Y)$

1. Quelles sont les lois de X et Y .
2. Calculer la probabilité $P(X \leq k)$ pour $k \in [[0, n]]$.
3. Quel est le support de M ?
4. Pour $k \in [[1, n]]$, compléter et démontrer la formule suivante.

$$[M \leq k] = [X \leq \dots] \cap [Y \leq \dots]$$

5. En déduire la fonction de répartition de M .
6. Quelle est la loi de M ?

Exercices avec des $\sum \sum$ **EXERCICE 9**

On peut écrire $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \right)$. Réécrire les sommes suivantes

$$\begin{array}{l} 1. \sum_{1 \leq i, j \leq p} a_{i,j} \\ 2. \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3. \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^*} a_{i,j} \\ 4. \sum_{0 \leq i \leq j} a_{i,j} \end{array}$$

**EXERCICE 10**

Soit $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ des réels. Simplifier les quantités suivantes

$$\begin{array}{l} 1. \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_i b_j \\ 2. \sum_{1 \leq i, j \leq n} b_j \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3. \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_i \\ 4. \sum_{\substack{1 \leq i < n \\ 1 \leq j \leq p}} i b_j \end{array}$$

**EXERCICE 11**

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, P([X = j] \cap [Y = k]) = a \cdot \frac{j+k}{2^{j+k}} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer la valeur de a .
2. Déterminer les lois marginales X et Y .
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X = Y)$.

**EXERCICE 12**

Soient $a \in \mathbb{R}$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont on donne la loi jointe

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a}{2^{i+j} j!}$$

1. Déterminer la valeur de a
2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y)
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

**EXERCICE 13**

Soient $a \in \mathbb{R}$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont on donne la loi jointe

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a(i+j)}{2^{i+j} i! j!}$$

1. Déterminer la valeur de a
2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) .
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

**EXERCICE 14**

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) = \frac{a}{j!k!} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer la valeur de a pour que $\sum_{(j,k) \in \mathbb{N}^2} \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) = 1$
2. Reconnaître les lois marginales de X et Y .
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

**EXERCICE 15**

On continue ici l'exercice

1. Montrer que $E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$
2. En déduire que $E(Y) = \frac{n+3}{4}$
3. Avec une technique analogue calculer $E(Y^2)$ et en déduire la variance de Y .

**EXERCICE 16**

Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, on pose $u_{i,j} = \frac{1}{(i+j)!}$.

1. (a) Établir : $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, u_{i,j} \leq \frac{1}{j!} \frac{1}{(j+1)^i}$

2. En déduire que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{i \geq 0} u_{i,j}$ est convergente et que sa somme, notée s_j , vérifie : $s_j \leq \frac{2}{j!}$.

3. Démontrer alors que la série double $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} u_{i,j}$ est convergente. Pour la suite de l'exercice, on notera $a = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}$.

2. Justifier l'existence d'un couple (X, Y) de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{1}{a(i+j)!}$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer simplement $\mathbb{P}([X + Y = n])$ en fonction de a et n .
4. En déduire la valeur de a

Vers les concours**EXERCICE 17**

Une urne U_1 contient n boules numérotées de 1 à n . Une urne U_2 contient des boules rouges en proportion p . On tire une boule au hasard dans U_1 et on note X la variable aléatoire correspondant au numéro de la boule obtenue. Si $X = k$, on tire k fois, avec remise, une boule dans l'urne U_2 et on appelle Y le nombre de boules rouges tirées.

1. Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = k$, pour $k \in X(\Omega)$.
3. Déterminer la loi du couple (X, Y) .

**EXERCICE 18**

Soient X et Y telles que $X \leftrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et telles que la loi conditionnelle de Y , sachant $X = k$ (où $k \in X(\Omega)$) est une loi binomiale de paramètre $n - k$ et p . Quelle est la loi de Y ?

**EXERCICE 19**

On place au hasard deux paires de chaussettes de couleurs différentes dans deux tiroirs notés t_1 et t_2 . Un tiroir peut donc contenir de 0 à 2 paires.

On note X_1 et X_2 respectivement les variables aléatoires égales au nombre de paires de chaussettes contenues dans les tiroirs t_1 et t_2 ainsi que N le nombre de tiroirs occupés.

On note alors T_i le numéro du tiroir choisi pour la paire de chaussettes numéro i . Les paires de chaussettes étant rangées dans les tiroirs indépendamment les unes des autres, on suppose donc que les variables T_1 et T_2 sont indépendantes.

1. Préciser les lois de T_1 et T_2 .
2. À l'aide des variables T_i , déterminer la loi conjointe du couple (N, X_1) que l'on présentera en recopiant et complétant le tableau suivant.

X_1/N	0	1	2
1			
2			

3. En déduire les lois marginales de N et X_1 . Que dire de l'indépendance de N et X_1 ?
4. Calculer $E(N)$, $E(X_1)$ puis $\text{cov}(N, X_1)$.
5. Que peut-on dire du couple (N, X_2) ?



EXERCICE 20

Une urne contient des boules numérotées de 1 à n (où $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$). On effectue deux tirages sans remise dans cette urne et on note X (resp. Y) le plus petit (resp. grand) numéro obtenu.

1. Déterminer les lois de X et Y ainsi que $E(X)$ et $E(Y)$.
2. Montrer que

$$P(X = i \cap Y = j) = \begin{cases} \frac{2}{n(n-1)}, & \text{si } 1 \leq i < j \leq n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Montrer que

$$E(XY) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}$$

4. (*) En déduire la $\text{Cov}(X, Y)$.
5. Écrire une fonction Python qui permette de simuler le couple (X, Y) . On commencera par simuler la pioche successive sans remise de deux boules.



EXERCICE 21

Un binôme de deux personnes nommées A et B participent à une épreuve physique. Ces deux personnes doivent grimper une corde. Une fois que l'une des deux personnes a réussi, elle doit attendre que l'autre personne en fasse de même. On considère que

- A et B disposent chacun de leur propre corde.
- A et B ont droit à autant d'essais qu'ils le souhaitent.
- Les essais sont indépendants.
- Chaque essai, qu'il soit réussi ou non, dure une minute et est réussi avec probabilité p .

On note X_1 (resp. X_2) le nombre d'essais nécessaires à A (resp. B) pour grimper la corde, et Y la variable aléatoire réelle égale à $|X_1 - X_2|$.

1. Quelle est la loi de X_1 ? De X_2 ? Donner leur espérance et leur variance.
2. Que représente l'événement $[Y = 0]$? Déterminer sa probabilité.
3. Montrer que pour tout n , pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(Y = k) = \frac{2p(1-p)^k}{2-p}$$

4. Écrire un programme Python permettant de simuler la variable aléatoire Y .
5. Pour quelles valeurs de p les deux personnes s'attendent-elles en moyenne moins de 5 minutes ?