

Oral HEC avec préparation 2021 - E8 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$A_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx \text{ et } v_n = \ln(n^{1/3} A_n)$$

1. Montrer que les suites (A_n) et (v_n) sont bien définies.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$
 - (a) Justifier que $A_n = A_{n+1} + \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}} dx$.
 - (b) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer A_{n+1} en fonction de A_n .
3. (a) Déterminer trois réels a, b, c tels que lorsque n tend vers $+\infty$: $v_{n+1} - v_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
(b) Étudier la convergence de la suite (v_n) .
4. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ converge-t-elle ?
5. On pose $b_k = \frac{A_k}{A_1}$. Écrire un programme Python qui pour une valeur de A réelle donnée par l'utilisateur renvoie une valeur de N pour laquelle on a :

$$\forall n \geq N, \sum_{k=1}^n b_k \geq A$$

Oral HEC avec préparation 2016 - E89 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit f_n la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Établir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre I_n et I_{n+2} .
3. Calculer I_0 et I_1 .
4. Tracer la courbe représentative de f_1 dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $F(x) = \int_{-\infty}^x f_1(x) dx$.
6. Justifier l'existence des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x) dx$ et calculer les.

Oral HEC sans préparation 2016 - E90 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], f_n(x) = \int_0^x e^{nt^2} dt - \int_x^1 e^{-nt^2} dt$$

1. Montrer que la fonction f_n est strictement monotone sur $[0, 1]$.
2. Établir l'existence d'un réel de $[0, 1]$, noté c_n , tel que $\int_0^{c_n} e^{nt^2} dt = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt$.
3. Montrer que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Oral HEC avec préparation 2022 - E7 :

Soit φ une fonction continue et positive sur $]0, +\infty[$ telle que $\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt$ converge.

On pose $A = \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt$.

On définit la fonction f sur $]0, +\infty[$ par $f : x \mapsto \int_{\frac{1}{x}}^x \varphi(t)dt$.

1. Soit f une fonction continue définie sur $]0, +\infty[$. Donner la définition de la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$.
2. Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser la valeur de $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Donner les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f ce prolongement.
5. On suppose dans cette question que φ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- (a) Justifier que φ est continue, positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt$ converge et préciser sa valeur.
 - (b) Tracer la courbe représentative de φ et préciser l'allure de la courbe au point d'abscisse 1.
 - (c) Tracer la courbe représentative de f et préciser la courbe au point d'abscisse 0 et au point d'abscisse 1.
6. Compléter fonction Python qui en utilisant une fonction `phi()` continue et positive sur $]0, +\infty[$ déjà programmée, renvoie une valeur approchée de $f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \varphi(t)dt$ pour $x \in]0, +\infty[$.

```
1 def approche(x):
2     n=1000
3     t=1/x
4     pas=...
5     S=...
6     for i in range(1,n+1):
7         ...
8         ...
9         ...
10    return(S)
```