
Correction de l'exercice n°1

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Étudier le signe, monotonie et convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

RÉPONSE:

Nous allons montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

- **Initialisation :**

Pour $n = 0$, la réponse est donnée dans l'énoncé, donc l'initialisation est acquise.

- **Hérédité :**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \in [0, 1]$. Montrons que $u_{n+1} \in [0, 1]$.

On sait que $u_{n+1} = u_n - u_n^2 = u_n(1 - u_n)$. Or par hypothèse de récurrence $u_n \in [0, 1]$ donc $1 - u_n \in [0, 1]$ et par produit $u_{n+1} \in [0, 1]$.

- **Conclusion :**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 < 0$.

Donc la suite (u_n) est décroissante.

D'après le théorème de la limite monotone, comme la suite est décroissante et minorée, elle converge.

La fonction $f : x \mapsto x - x^2$ est continue sur $[0, 1]$, donc ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$, c'est à dire $x = x - x^2$ ce qui donne $\ell = 0$.

La suite (u_n) converge vers 0.

2. Écrire une fonction Python, prenant en entrée **a** et **n** et rendant le couple (**U1**, **U2**) avec **U1** liste des $(u_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ et **U2** liste des $(u_k^2)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

RÉPONSE:

```
def f1(a, n):  
    u=[a]  
    u2=[a**2]  
    for k in range(1, n+1):  
        u.append(u[k-1]-u[k-1]**2)  
        u2.append(u[k]**2)  
    return (u[n], u2[n])
```

3. Écrire un programme Python permettant de représenter graphiquement les 100 premiers termes des suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(u_n^2)_{n \geq 0}$. On prendra $a = \frac{1}{2}$.

RÉPONSE:

Il suffit de modifier le programme pour qu'il renvoie la liste des éléments.

```
def f2(a, n):  
    u=[a]  
    u2=[a**2]  
    for k in range(1, n+1):  
        u.append(u[k-1]-u[k-1]**2)  
        u2.append(u[k]**2)
```

```

        u2.append(u[k]**2)
    return (u, u2)

```

```

a=1/2
n=100
[u, v]=f2(a, n)
plt.plot(range(n+1), u)
plt.plot(range(n+1), v)
plt.show()

```

4. Montrer que la série de terme général u_n^2 converge. Calculer sa somme.

RÉPONSE:

Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^N u_k^2 = \sum_{k=0}^N u_k - \sum_{k=0}^N u_{k+1} = \sum_{k=0}^N u_k - \sum_{i=1}^{N+1} u_i = u_0 - u_{N+1}$$

En passant à la limite, on trouve

La série converge vers u_0 .

5. On pose $R_n = \sum_{k=1}^n u_k$ et $T_n = \sum_{k=1}^n u_k^2$. En utilisant l'instruction Python `np.cumsum(liste)`, écrire un programme permettant de représenter graphiquement $S_1 = (R_n)_{n \in \llbracket 1, 100 \rrbracket}$ et $S_2 = (S_n)_{n \in \llbracket 1, 100 \rrbracket}$.

RÉPONSE:

```

a=1/2
n=100
[u, v]=f2(a, n)
R=np.cumsum(u)
S=np.cumsum(v)
plt.plot(range(n+1), R)
plt.plot(range(n+1), S)
plt.show()

```

6. Montrer que la série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.

RÉPONSE:

Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^N \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^N \ln(u_{k+1}) - \sum_{k=0}^N \ln(u_k) = \sum_{i=1}^{N+1} \ln(u_i) - \sum_{k=0}^N \ln(u_k) = \ln(u_{N+1}) - \ln(u_0)$$

Comme la suite (u_n) converge vers 0, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_{n+1}) = -\infty$.

Donc la série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.

7. Écrire un programme permettant de représenter graphiquement $(T_n)_{n \in \llbracket 1, 100 \rrbracket}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{u_{k+1}}{u_k} \right).$$

RÉPONSE:

```
def f3(a,n):
    u=[a,a-a**2] % liste contenant u_0 et u_1
    ln=[]
    for k in range(1,n+1):
        u.append(u[k]-u[k]**2)
        ln.append(np.log(u[k+1]/u[k]))
    T=np.cumsum(ln)
    return (T)

a=1/2
n=100
T=f3(a,n)
plt.plot(range(1,n+1),T)
plt.show()
```

* * *

Correction de l'exercice n°2

On considère la fonction f définie sur $]0, 1[$ par :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

Partie A : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0, 1[, f'(x) = \frac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2} (-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x))$$

RÉPONSE:

La fonction f est dérivable sur $]0, 1[$ car elle est le quotient $f = \frac{f_1}{f_2}$ où :

- $f_1 : x \mapsto \ln(1-x)$ est dérivable sur $]0, 1[$ car elle est la composée $f_1 = g_2 \circ g_1$ où :
 - $g_1 : x \mapsto 1-x$ est :
 - * dérivable sur $]0, 1[$,
 - * telle que : $g_1(]0, 1[) \subseteq]0, 1[$.
 - $g_2 : x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]0, 1[$.
- $f_2 : x \mapsto \ln(x)$:
 - est dérivable sur $]0, 1[$,
 - NE S'ANNULE PAS sur $]0, 1[$.

La fonction f est dérivable sur $]0, 1[$.

Soit $x \in]0, 1[$.

$$f'(x) = \frac{\frac{-1}{1-x} \ln(x) - \ln(1-x) \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{\frac{-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x)}{x(1-x)}}{(\ln(x))^2} = \frac{-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x)}{x(1-x)(\ln(x))^2}$$

$$\text{On a bien : } \forall x \in]0, 1[, f'(x) = \frac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2} (-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x)).$$

* * *

2. (a) Justifier : $\forall t \in]0, 1[, t \ln(t) < 0$

RÉPONSE:

Soit $t \in]0, 1[$.

Alors $\ln(t) < 0$ (par définition de la fonction $\ln$) donc $t \ln(t) < 0$ (par multiplication par $t > 0$) $\forall t \in]0, 1[, t \ln(t) < 0$

* * *

- (b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0, 1[$.

RÉPONSE:

Soit $x \in]0, 1[$.

- D'après la question 1, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2} (-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x))$$

Or : $x > 0, 1-x > 0$ et $(\ln(x))^2 > 0$. Ainsi : $x(1-x)(\ln(x))^2 > 0$.

On en déduit que le signe de $f'(x)$ est celui de la quantité $-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x)$.

- En utilisant la propriété de la question précédente pour $t = x \in]0, 1[$, on obtient : $x \ln(x) < 0$ et donc $-x \ln(x) > 0$.
- En utilisant la propriété de la question précédente pour $t = 1 - x \in]0, 1[$, on obtient : $(1 - x) \ln(1 - x) < 0$ et donc $-(1 - x) \ln(1 - x) > 0$.

Ainsi : $-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x) > 0$. On en déduit : $\forall x \in]0, 1[$, $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]0, 1[$.

* * *

3. (a) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.

RÉPONSE:

- Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(x)} = 0$.
- Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 - x) = \ln(1) = 0$, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x)}{\ln(x)} = 0 \times 0 = 0$$

La fonction f est prolongeable par continuité en posant $f(0) = 0$.

* * *

On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.

- (b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

RÉPONSE:

Soit $x \in]0, 1[$.

$$\tau_0(f)(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} - 0}{x} = \frac{\ln(1-x)}{x \ln(x)} \underset{0}{\sim} \frac{-x}{x \ln(x)} = \frac{-1}{\ln(x)}$$

Or : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\ln(x)} = 0$.

La fonction taux d'accroissement $\tau_0(f)$ admet donc une limite finie lorsque $x \rightarrow 0$.

On en conclut que la fonction f est dérivable en 0, de dérivée $f'(0) = 0$.

* * *

4. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

RÉPONSE:

- Tout d'abord, comme $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) = 0$, on a : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln(x)} = -\infty$.
- En posant $t = 1 - x$, on obtient : $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(1 - x) = \lim_{t \rightarrow 0} \ln(t) = -\infty$.

On en déduit, par produit de limites :

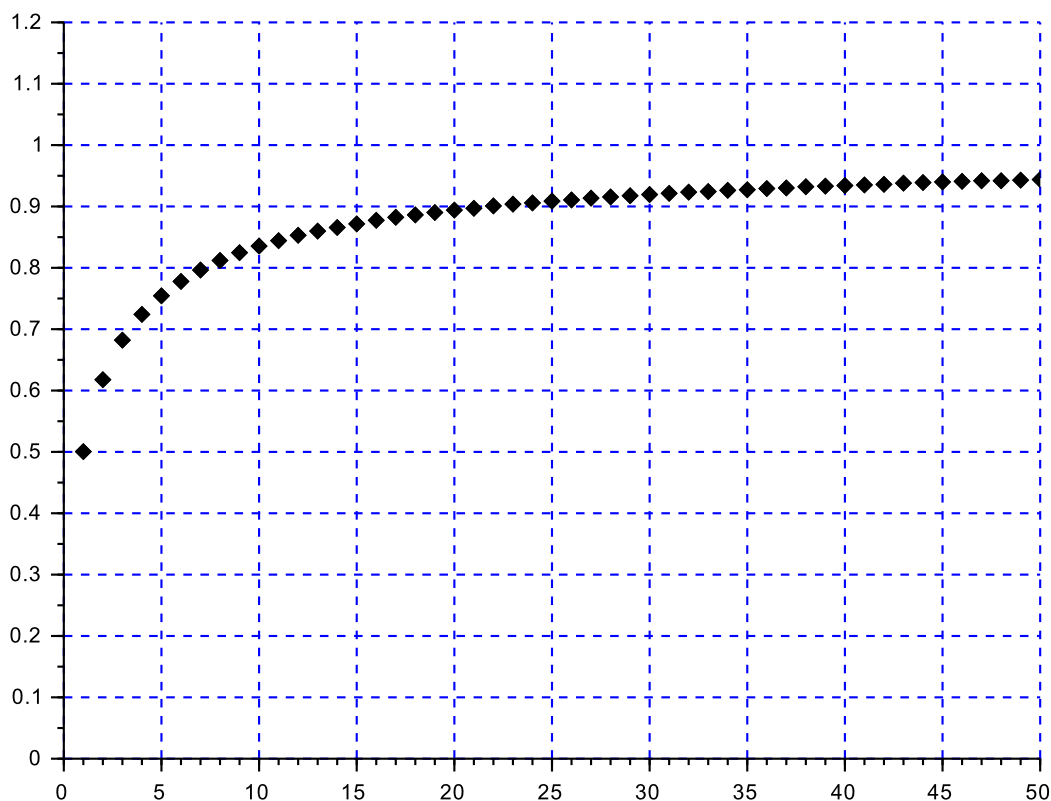
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 - x)}{\ln(x)} = +\infty$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$, la droite $x = 1$ est une asymptote verticale de la courbe représentative de f .

* * *

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

RÉPONSE:



* * *

Partie B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$.

En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on note u_n .

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans la suite, on note $h_n : x \mapsto x^n + x - 1$.

- La fonction h_n est une fonction polynomiale (de degré n).
Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$h'_n(x) = n x^{n-1} + 1$$

Comme $x \geq 0$, alors : $x^{n-1} \geq 0$. Ainsi : $n x^{n-1} + 1 \geq 1 > 0$.

On en déduit le tableau de variation suivant.

x	0	$+\infty$
Signe de $h'_n(x)$	+	
h_n	-1	$+\infty$

- La fonction h_n est :
 - continue sur $[0, +\infty[$,
 - strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $h_n([0, +\infty[)$. Or :

$$h_n([0, +\infty[) = [h_n(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} h_n(x)[= [-1, +\infty[$$

Comme $0 \in [-1, +\infty[$, l'équation $h_n(x) = 0$ admet une unique solution $u_n \in [0, +\infty[$.

L'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ notée u_n .

7. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Remarquons :
 - $h_n(0) = -1$.
 - $h_n(u_n) = 0$, par définition.
 - $h_n(1) = 1$.

Ainsi :

$$h_n(0) < h_n(u_n) < h_n(1)$$

- Or, d'après le théorème de la bijection, $h_n^{-1} : [-1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. En appliquant h_n^{-1} , on obtient alors :

$$\begin{array}{ccccc} h_n^{-1}(h_n(0)) & < & h_n^{-1}(h_n(u_n)) & < & h_n^{-1}(h_n(1)) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & & u_n & & 1 \end{array}$$

On a bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in]0, 1[$.

8. Déterminer u_1 et u_2 .

RÉPONSE:

- Par définition, u_1 est l'unique solution positive de l'équation : $h_1(x) = 0$. Or :

$$h_1(x) = 0 \Leftrightarrow x^1 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

On en déduit : $u_1 = \frac{1}{2}$.

- Par définition, u_2 est l'unique solution positive de l'équation : $h_2(x) = 0$. Or :

$$h_2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

Notons $P(X) = X^2 + X - 1$ le polynôme de degré 2 associé à la fonction h_2 .

Ce polynôme admet pour discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) = 1 + 4 = 5 > 0$.

Ainsi, P admet deux racines :

$$x_- = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0 \quad \text{et} \quad x_+ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Comme $5 \geq 1$, alors : $\sqrt{5} \geq \sqrt{1} = 1$ et ainsi : $\sqrt{5} - 1 \geq 0$.

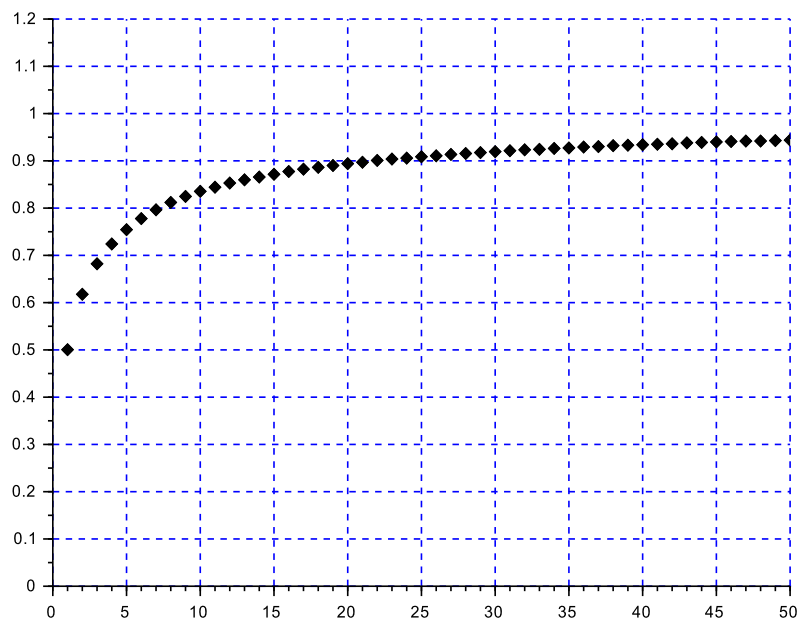
$$\text{On en déduit : } u_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

9. (a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
def valeur_approchee(n):
    a=0
    b=1
    while ... :
        c=(a+b)/2
        if c**n+c-1>0:
            ...
        else :
            ...
    return (...)
```

RÉPONSE:

- (b) On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant. Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?



RÉPONSE:

Le graphe permet d'effectuer les conjectures suivantes :

- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante,
- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est minorée par $\frac{1}{2}$,
- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par 1,
- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite 1.

* * *

10. (a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $f(u_n) = n$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$f(u_n) = \frac{\ln(1 - u_n)}{\ln(u_n)} = \frac{\ln(u_n^n)}{\ln(u_n)}$$

car $u_n^n = 1 - u_n$ par définition de u_n . Donc $\frac{n \ln(u_n)}{\ln(u_n)}$.

On a bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(u_n) = n$.

* * *

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question précédente :

$$f(u_n) = n \leq n + 1 = f(u_{n+1})$$

- Or, d'après l'étude en Partie A, la fonction f réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $]0, +\infty[$. D'après le théorème de la bijection, $f^{-1} :]0, +\infty[\rightarrow]0, 1[$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

En appliquant f^{-1} , on obtient alors :

$$f^{-1}(f(u_n)) \leq f^{-1}(f(u_{n+1}))$$

||

||

u_n

u_{n+1}

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante.

* * *

(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

RÉPONSE:

- D'après ce qui précède, la suite (u_n) est :
 - croissante,
 - majorée par 1 (on démontre en question 7 : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in]0, 1[$).

On en conclut que la suite (u_n) est convergente de limite $\ell \in [0, 1]$.

- Par ailleurs, comme la suite (u_n) est croissante, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq u_1 = \frac{1}{2}$$

On en conclut, par passage à la limite : $\ell \geq \frac{1}{2}$.

- Démontrons alors $\ell = 1$. Pour ce faire, on procède par l'absurde.

On suppose : $\ell \neq 1$. D'après ce qui précède, on a donc : $\ell \in [\frac{1}{2}, 1[$.

La fonction f est continue en $\ell \in [\frac{1}{2}, 1[\subseteq]0, 1[$. Ainsi, la suite $(f(u_n))$ est convergente de limite $f(\ell) \in \mathbb{R}$. Par passage à la limite dans l'égalité définie en 10.a, on obtient :

$$f(\ell) = +\infty$$

Absurde !

On en conclut que la suite (u_n) est convergente de limite $\ell = 1$.

* * *

Correction du problème

On admet pour cet exercice que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$.

Partie A : Un équivalent par télescopage

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$$

1. On admet la formule de Taylor à l'ordre 3 énoncé comme suit. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0, alors

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2}t^2 + \frac{f'''(0)}{3!}t^3 + o(t^3)$$

Justifier que la formule s'applique et exprimer le développement limité de $t \mapsto \ln(1+t)$ à l'ordre 3 en 0.

RÉPONSE:

On admet la formule de Taylor à l'ordre 3 énoncé comme suit. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0, alors

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2}t^2 + \frac{f'''(0)}{3!}t^3 + o(t^3), \quad t \rightarrow 0$$

La fonction $\varphi : t \mapsto \ln(1+t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0, on peut donc lui appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 3. Comme

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = \frac{1}{1+0} = 1, \quad \varphi''(0) = -\frac{1}{(1+0)^2} = -1, \quad \varphi'''(0) = \frac{2}{(1+0)^3} = 2,$$

on a

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{2}{6}t^3 + o(t^3) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

2. Montrer soigneusement qu'on a $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$.

RÉPONSE:

Commençons par voir que

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1} e^{-n-1} \sqrt{n+1} n!}{(n+1)! n^n e^{-n} \sqrt{n}} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^n e^{-1} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \\ &= \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1/2} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1/2} \end{aligned}$$

Ainsi, comme $u = 1/n \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} v_n = \ln(u_n) &= \ln \left(\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1/2} \right) \\ &= -1 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ &= -1 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \\ &= -1 + 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

et on peut donc conclure que

$$v_n \sim \frac{1}{12n^2}, \quad n \rightarrow +\infty$$

* * *

3. En déduire la convergence de la série $\sum v_n$, puis l'existence d'une constante $K > 0$ telle que $n! \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}e^{-n}n^n}{K}$.

RÉPONSE:

Par le critère de Riemann, la série $\sum 1/n^2$ converge. Par critère d'équivalence (pour les séries à termes positifs car $v_n \geq 0$), on peut donc affirmer que la série $\sum v_n$ est également convergente. Mais alors, par télescopage,

$$\ln(u_n) - \ln(u_1) = \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \sum_{k=1}^{n-1} v_k$$

et

$$u_n = \exp(\ln(u_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \kappa = \exp\left(\ln(u_1) + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k\right) > 0$$

ce qui se réécrit

$$\frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!} \times \frac{1}{\kappa} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$$

ou encore

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}e^{-n}n^n}{\kappa}$$

* * *

Partie B : Une première suite d'intégrales

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$$

4. Montrer que la suite (I_n) est bien définie et décroissante.

RÉPONSE:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto (1-t^2)^n$ est continue sur $[0;1]$, donc l'intégrale I_n est bien définie. De plus

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} dt - \int_0^1 (1-t^2)^n dt \\ &= \int_0^1 \left((1-t^2)^{n+1} - (1-t^2)^n \right) dt \\ &= \int_0^1 (1-t^2)^n (-t^2) dt \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

par positivité de l'intégrale, car, pour tout $t \in [0;1]$, $-t^2 (1-t^2)^n \leq 0$. On a bien que $I_{n+1} \leq I_n$ et donc, la suite (I_n) est décroissante.

* * *

5. Montrer que, pour tout $u \in [0;1]$, $0 < 1-u \leq e^{-u}$.

RÉPONSE:

Pour l'inégalité de gauche, c'est trivial; si $u \in [0; 1]$, alors $1 - u \geq 0$. Concernant celle de droite, c'est une inégalité classique dont on a déjà montré plusieurs variantes. On propose ici un argument de convexité. En effet, $u \mapsto e^{-u}$ est convexe sur $\mathbb{R}$ (donc sur $[0; 1]$) car sa dérivée seconde est strictement positive. Sa courbe est alors au dessus de toutes ses tangentes, en particulier celle au point $u = 0$ dont l'équation est $y = 1 - u$ donnant ainsi l'inégalité voulue.

* * *

6. Montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$, et préciser sa valeur C (on pourra utiliser un changement de variable).

RÉPONSE:

Pour tout $x \geq 0$, $e^{-x^2} \geq 0$ et, au voisinage de $+\infty$, on a $e^{-x^2} = o(1/x^2)$. Par critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions positives et par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, on peut conclure que

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx \text{ converge.}$$

Sur $[0; 1]$, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue et l'intégrale est alors bien définie.

De plus, en considérant le changement de variable affine $\sqrt{2}x = t$ (qui donne $x^2 = t^2/2$ et $\sqrt{2} dx = dt$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx &\stackrel{A \rightarrow +\infty}{\leftarrow} \int_0^A e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2} \cdot A} e^{-t^2/2} dt \stackrel{A \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \\ \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \quad (\text{par parité}) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} = C \end{aligned}$$

* * *

7. En déduire, à l'aide du changement de variables $x = \sqrt{n} \cdot t$, que $0 \leq I_n \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$.

RÉPONSE:

Commençons par utiliser l'encadrement de la question (2). Soit $t \in [0; 1]$, par croissance de la fonction $u \mapsto u^n$,

$$0 \leq (1 - t^2)^n \leq (e^{-t^2})^n = e^{-nt^2}$$

Par croissance de l'intégrale, puis par changement de variables affine $x = \sqrt{n} \cdot t$ (qui donne $dx = \sqrt{n} dt$, on obtient donc

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2} dt = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx$$

Comme $e^{-x^2} > 0$, on a

et on en déduit bien l'encadrement

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = C$$

$$0 \leq I_n \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$$

* * *

8. Que peut-on conclure quant à la limite de (I_n) ?

RÉPONSE:

Le théorème des gendarmes permet de déduire de l'encadrement précédent que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

* * *

9. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \geq 1$,

$$I_n = 2n(I_{n-1} - I_n)$$

puis que

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$$

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que

$$(1-t^2)^n = (1-t^2)(1-t^2)^{n-1} = (1-t \times t)(1-t^2)^{n-1}$$

il suit que, par linéarité de l'intégrale

$$\int_0^1 (1-t^2)^n dt = \int_0^1 (1-t^2)^{n-1} dt - \int_0^1 t \times t (1-t^2)^{n-1} dt = I_{n-1} - \int_0^1 t \times t (1-t^2)^{n-1} dt$$

On pose alors

$$\begin{cases} u' = t(1-t^2)^{n-1} \\ v = t \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u = -\frac{1}{2n} (1-t^2)^n \\ v' = 1 \end{cases}$$

Les fonctions u et v étant bien de classe C^1 sur $[0;1]$, l'intégration par parties est licite et donne

$$\begin{aligned} I_n &= I_{n-1} - \int_0^1 t \times t (1-t^2)^{n-1} dt \\ &= I_{n-1} - \left[-\frac{t(1-t^2)^n}{2n} \right]_0^1 - \frac{1}{2n} \int_0^1 (1-t^2)^n dt \\ &= I_{n-1} - \frac{1}{2n} I_n \end{aligned}$$

ou encore

$$I_n + \frac{1}{2n} I_n = I_{n-1} \iff I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$$

* * *

10. En déduire que $I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.

RÉPONSE:

Comme l'énoncé le demande, on procède par récurrence.

- initialisation. Pour $n = 0$

$$I_0 = \int_0^1 (1-t^2)^0 dt = \int_0^1 dt = 1 = \frac{(2^0 0!)^2}{(2 \times 0 + 1)!}$$

- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

Mais alors

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} I_n \quad (d'après (6)) \\ &= \frac{2(n+1)}{2n+3} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \quad (d'après (HR)) \\ &= \frac{2(n+1)(2n+2) (2^n n!)^2}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} \\ &= \frac{2^2(n+1)^2 (2^n n!)^2}{(2n+3)!} \\ &= \frac{(2^{n+1}(n+1)!)^2}{(2n+3)!}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule au rang $n+1$ et termine la récurrence.

11. Compléter alors la fonction ci-dessous pour qu'elle permette de calculer et de renvoyer la valeur de I_n

```
1 import numpy as np
2
3 def I(n):
4     i=1
5     for k in ... :
6         i=...
7     return i
```

RÉPONSE:

12. En écrivant $I_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$ et à l'aide de la question 3, montrer qu'il existe une constante α telle que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$.

RÉPONSE:

Il est clair qu'on peut écrire

$$I_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$$

L'équivalent obtenu à la question (3) permet d'écrire

$$n! \sim \frac{\sqrt{n} e^{-n} n^n}{\kappa}, \quad (2n)! \sim \frac{\sqrt{2n} e^{-2n} (2n)^{2n}}{\kappa}$$

ce qui donne

$$I_n \sim \frac{4^n}{2n+1} \times \left(\frac{\sqrt{n} e^{-n} n^n}{\kappa} \right)^2 \times \frac{\kappa}{\sqrt{2n} e^{-2n} (2n)^{2n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\kappa}(2n+1)} \sim \frac{1}{2\sqrt{2\kappa}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

En posant $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2\kappa}}$, on a bien

$$I_n \sim \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$$

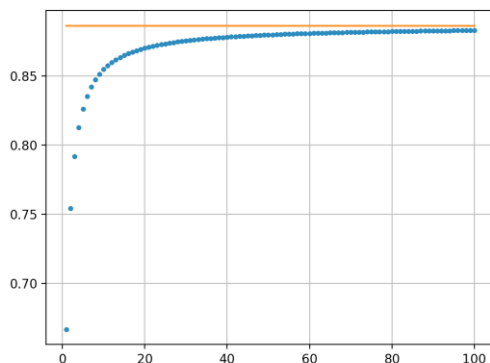
13. Quelle est la nature de la série $\sum I_n$?

RÉPONSE:

Par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs et comparaison à une série de Riemann divergente ($\sum 1/\sqrt{n}$), on peut affirmer que la série $\sum I_n$ diverge.

14. On rajoute les instructions Python à la suite de la fonction écrite précédemment, et on obtient la figure ci-contre. Emettre une conjecture quant à la valeur de α , puis pour celle de K .

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2
3 N=[k for k in range(1,101)]
4 eq=[I(k)*np.sqrt(k) for k in N]
5 plt.grid()
6 plt.plot(N,eq,'. ')
7 M=[np.sqrt(np.pi)/2 for k in N]
8 plt.plot(N,M)
9 plt.show()
```



RÉPONSE:

Les instructions données permettent de représenter graphiquement la suite $(I_n \cdot \sqrt{n})$ qui, d'après ce qui précède, est censée converger (cela découle de l'équivalent) vers α .

La présence de la droite rouge, d'équation $y = \sqrt{\pi}/2$ semble laisser penser que

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt{k} I_k = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

On peut alors également conjecturer que

$$\kappa = \frac{1}{2\sqrt{2}\alpha} = \frac{2}{2\sqrt{2}\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Partie C : Détermination des constantes K et α .

On introduit maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$, la suite

$$J_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$$

15. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale J_n est bien définie et préciser la valeur de J_0 .

RÉPONSE:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0; 1]$ donnant un sens à l'intégrale sur ce même intervalle. Par croissance comparée, on peut voir que

$$x^n e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty$$

ce qui permet, par un argument de négligeabilité et une comparaison à une intégrale de Riemann convergente que

$$\int_1^{+\infty} x^n e^{-x} \, dx$$

puis J_n converge. Pour $n = 0$, on peut faire le calcul. Soit $A > 0$,

$$\int_0^A e^{-x} \, dx = [-e^{-x}]_0^A = -e^{-A} + 1 \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1$$

ce qui donne $J_0 = 1$.

* * *

16. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_{n+1} = (n+1)J_n$.

RÉPONSE:

Soit $A > 0$. On introduit

$$\begin{cases} u' = e^{-x} \\ v = x^{n+1} \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont toutes les deux de classe C^1 sur $[0; A]$, donc par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} \int_0^A x^{n+1} e^{-x} \, dx &= [-x^{n+1} e^{-x}]_0^A + (n+1) \int_0^A x^n e^{-x} \, dx \\ &= -A^{n+1} e^{-A} + (n+1) \int_0^A x^n e^{-x} \, dx \end{aligned}$$

Or,

et, par croissance comparée,

$$\begin{aligned} \int_0^A x^{n+1} e^{-x} \, dx &\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} J_{n+1}, \quad \int_0^A x^n e^{-x} \, dx \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} J_n \\ -A^{n+1} e^{-A} &\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

ce qui donne bien

$$J_{n+1} = (n+1)J_n$$

* * *

17. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n! = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \, dx$$

RÉPONSE:

Une récurrence quasi-immédiate donne alors $J_n = n!$.

- Pour $n = 0$, on a $J_0 = 1 = 0!$.
- Si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on a $J_n = n!$, alors $J_{n+1} = (n+1)J_n = (n+1)n! = (n+1)!$, ce qui termine la récurrence et prouve bien la formule qui peut aussi s'écrire, par définition de J_n sous la forme :

$$n! = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \, dx$$

* * *

18. Montrer soigneusement, à l'aide du changement de variable $x = n + y\sqrt{n}$, que

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} dy$$

RÉPONSE:

Soit $A > 0$. En posant le changement de variable affine $x = n + y\sqrt{n}$, on a $y = (x - n)/\sqrt{n}$ et $dx = \sqrt{n} \, dy$. De plus, et

$$e^{-x} = \exp(-n - y\sqrt{n}) = \frac{1}{e^n} e^{-y\sqrt{n}}$$

$$x^n = (n + y\sqrt{n})^n = n^n \left(1 + \frac{\sqrt{n}}{n} y\right)^n = n^n \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Ainsi, la formule de changement de variable donne

$$\int_0^A x^n e^{-x} \, dx = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{A/\sqrt{n} - \sqrt{n}} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} \, dy$$

L'intégrale de gauche étant convergente, celle de droite aussi, et par passage à la limite lorsque $A \rightarrow +\infty$, on a donc bien

$$n! = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \, dx = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} \, dy$$

* * *

19. On note $g_n(y) = \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}}$.

(a) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(y)$.

RÉPONSE:

Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Observant que $y/\sqrt{n} \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$, on peut utiliser des DL pour obtenir la limite.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} &= \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right) - y\sqrt{n}\right) \\ &= \exp\left(n\left(\frac{y}{\sqrt{n}} - \frac{y^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - y\sqrt{n}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{y^2}{2} + o(1)\right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \end{aligned}$$

* * *

(b) En admettant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(y) dy$, déterminer la valeur de K . En déduire celle de α .

RÉPONSE:

En admettant la permutation des limites proposée, on peut écrire

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} n! \times \frac{e^n}{n^n \sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy \\ &= \sqrt{2\pi}\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la première partie et la définition de κ , on peut écrire que

$$\frac{1}{\kappa} = \sqrt{2\pi} \iff \kappa = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

ce qu'on avait au préalable conjecturé, ce qui confirme bien que $\alpha = \sqrt{\pi}/2$.

* * *