

Devoir Libre

Option Économique

MATHÉMATIQUES

Pour le mardi 4 Novembre 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Les questions précédées de (*) sont destinées aux cubes.

Exercice n°1

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Étudier le signe, monotonie et convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.
2. Écrire une fonction Python, prenant en entrée **a** et **n** et rendant le couple (U1, U2) avec U1 liste des $(u_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ et U2 liste des $(u_k^2)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.
3. Écrire un programme Python permettant de représenter graphiquement les 100 premiers termes des suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(u_n^2)_{n \geq 0}$. On prendra $a = \frac{1}{2}$.
4. Montrer que la série de terme général u_n^2 converge. Calculer sa somme.
5. On pose $R_n = \sum_{k=1}^n u_k$ et $T_n = \sum_{k=1}^n u_k^2$. En utilisant l'instruction Python `np.cumsum(liste)`, écrire un programme permettant de représenter graphiquement $S_1 = (R_n)_{n \in \llbracket 1, 100 \rrbracket}$ et $S_2 = (T_n)_{n \in \llbracket 1, 100 \rrbracket}$.
6. Montrer que la série de terme général $\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$ est divergente.
7. Écrire un programme permettant de représenter graphiquement $(T_n)_{n \in \llbracket 1, 100 \rrbracket}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{u_{k+1}}{u_k} \right).$$

Exercice n°2

On considère la fonction f définie sur $]0, 1[$ par :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

Partie A : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0, 1[, f'(x) = \frac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2} (-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x))$$

2. (a) Justifier : $\forall t \in]0, 1[, t \ln(t) < 0$
(b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0, 1[$.
3. (a) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.
(b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
4. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

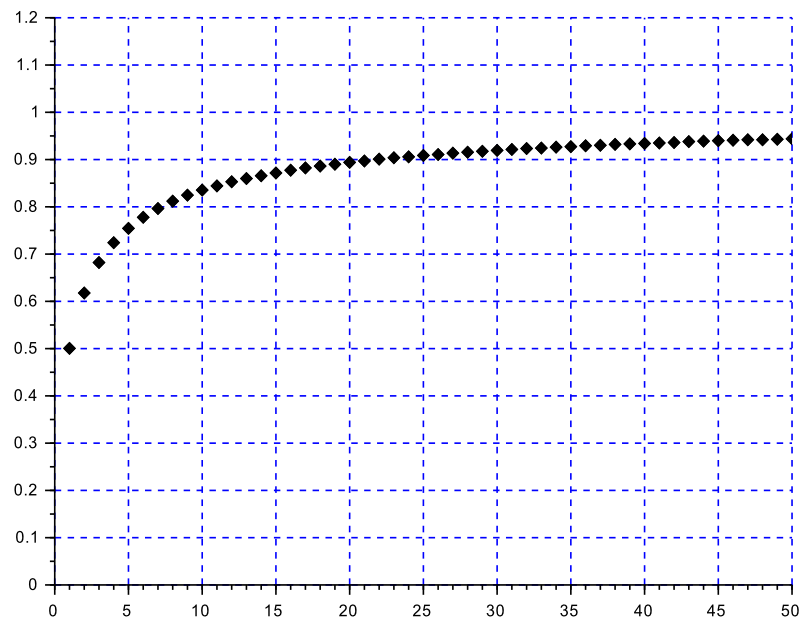
Partie B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$.
En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on note u_n .
7. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0, 1[$.
8. Déterminer u_1 et u_2 .
9. (a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
def valeur_approchee(n):  
    a=0  
    b=1  
    while ... :  
        c=(a+b)/2  
        if c**n+c-1>0:  
            ...  
        else :  
            ...  
    return (...)
```

- (b) On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant.
Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?



10. (a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $f(u_n) = n$.
 (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
 (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Problème

On admet pour cet exercice que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$.

Partie A : Un équivalent par télescope

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$$

1. On admet la formule de Taylor à l'ordre 3 énoncé comme suit. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0, alors

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2}t^2 + \frac{f'''(0)}{3!}t^3 + o(t^3)$$

Justifier que la formule s'applique et exprimer le développement limité de $t \mapsto \ln(1+t)$ à l'ordre 3 en 0.

RÉPONSE:

* * *

2. Montrer soigneusement qu'on a $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$.

RÉPONSE:

* * *

3. En déduire la convergence de la série $\sum v_n$, puis l'existence d'une constante $K > 0$ telle que $n! \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}e^{-n}n^n}{K}$.

Partie B : Une première suite d'intégrales

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$$

4. Montrer que la suite (I_n) est bien définie et décroissante.
5. Montrer que, pour tout $u \in [0; 1]$, $0 < 1-u \leq e^{-u}$.
6. Montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$, et préciser sa valeur C (on pourra utiliser un changement de variable).
7. En déduire, à l'aide du changement de variables $x = \sqrt{n}.t$, que $0 \leq I_n \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$.
8. Que peut-on conclure quant à la limite de (I_n) ?
9. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \geq 1$,

$$I_n = 2n(I_{n-1} - I_n)$$

puis que

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$$

10. En déduire que $I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.
11. Compléter alors la fonction ci-dessous pour qu'elle permette de calculer et de renvoyer la valeur de I_n

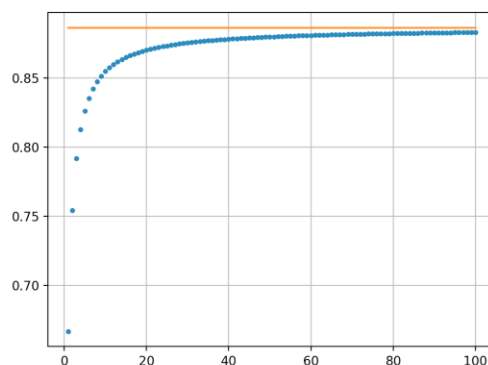
```
import numpy as np

def I(n):
    i=1
    for k in ... :
        i=...
    return i
```

12. En écrivant $I_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$ et à l'aide de la question 3, montrer qu'il existe une constante α telle que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$.
13. Quelle est la nature de la série $\sum I_n$?
14. On rajoute les instructions Python à la suite de la fonction écrite précédemment, et on obtient la figure ci-contre. Emettre une conjecture quant à la valeur de α , puis pour celle de K .

```
import matplotlib.pyplot as plt

N=[k for k in range(1,101)]
eq=[I(k)*np.sqrt(k) for k in N]
plt.grid()
plt.plot(N,eq,'.')
M=[np.sqrt(np.pi)/2 for k in N]
plt.plot(N,M)
plt.show()
```



Partie C : Détermination des constantes K et α .

On introduit maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$, la suite

$$J_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$$

15. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale J_n est bien définie et préciser la valeur de J_0 .
16. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_{n+1} = (n+1)J_n$.
17. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n! = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$$

18. Montrer soigneusement, à l'aide du changement de variable $x = n + y\sqrt{n}$, que

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} dy$$

19. On note $g_n(y) = \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}}$.

(a) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(y)$.

(b) En admettant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(y) dy$, déterminer la valeur de K . En déduire celle de α .