

## Option Économique

## MATHÉMATIQUES

17 Novembre 2025

---

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Les questions précédées de (\*) sont destinées aux cubes.

---

## Exercice n°1

## Exercice 1

1. a. On a  $v = f(e_1) + e_1$  mais, puisque  $A$  est la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ , la lecture de sa première colonne permet d'affirmer que  $f(e_1) = -2e_2 + e_3$ . Ainsi,

$$v = f(e_1) + e_1 = e_1 - 2e_2 + e_3.$$

- b. Montrons que la famille  $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$  est libre. Soient  $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbf{R}$ , on a

$$\begin{aligned}\lambda u + \mu v + \gamma e_1 = 0 &\Leftrightarrow \lambda(e_1 - e_2) + \mu(e_1 - 2e_2 + e_3) + \gamma e_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda + \mu + \gamma)e_1 + (-\lambda - 2\mu)e_2 + \mu e_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + \gamma = 0 \\ -\lambda - 2\mu = 0 \\ \mu = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \lambda = \mu = \gamma = 0.\end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathcal{C}$  est une famille libre de  $\mathbf{R}^3$ . Puisque  $\dim(\mathbf{R}^3) = 3$ , il vient :

$$\mathcal{C} \text{ est une base de } \mathbf{R}^3.$$

c. Par définition de la matrice de passage  $P$  de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$ , on a

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour calculer  $P^{-1}$ , on peut procéder à un calcul d'inverse mais on peut plus élégamment utiliser le fait que  $P^{-1}$  est la matrice de passage de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{B}$  et que, si l'on pose  $e'_1 = u$ ,  $e'_2 = v$  et  $e'_3 = e_1$ , alors on a les relations :

$$\begin{cases} e_1 &= e'_3 \\ e_2 &= e'_3 - e'_1 \\ e_3 &= -2e'_1 + e'_2 + e'_3 \end{cases}.$$

Ainsi,

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. a. Un calcul donne  $f(u) = (2, -2, 2) = 2u$ ,  $f(v) = (-1, 2, -1) = -v$  et  $f(e_1) = (0, -2, 1) = v - e_1$ . On peut construire la matrice dans la base  $\mathcal{C}$  :

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

- b. La matrice  $A'$  est triangulaire, ses valeurs propres sont donc situées sur sa diagonale. Ainsi,  $\text{Sp}(A) = \{-1, 2\}$  et puisque  $A'$  est une matrice représentative de l'endomorphisme  $f$ , il vient :

$$\text{Sp}(f) = \{-1, 2\}.$$

En outre,

$$\text{rg}(A' - 2I_3) = \text{rg} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = 2$$

donc

$$\dim E_2(f) = \dim E_2(A') = \dim \ker(A' - 2I_3) = 3 - \text{rg}(A' - 2I_3) = 1.$$

De même,

$$\text{rg}(A' + I_3) = \text{rg} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

donc

$$\dim E_{-1}(f) = \dim E_{-1}(A') = \dim \ker(A' + I_3) = 3 - \text{rg}(A' + I_3) = 1.$$

Ainsi,

$$\dim E_{-1}(f) + \dim E_2(f) = 1 + 1 = 2 < 3 = \dim(\mathbf{R}^3).$$

En conclusion,

$f$  n'est pas diagonalisable.

- c. D'après la question précédente, on a  $0 \notin \text{Sp}(f)$ . Ainsi,  $\ker f = \{0\}$  et donc  $f$  est injectif. Puisqu'il s'agit d'un endomorphisme de  $\mathbf{R}^3$  et que  $\mathbf{R}^3$  est de dimension finie :

$f$  est bijectif.

- d. Comme observé à la question 2.a, on a la relation :

$$A' = P^{-1}AP.$$

3. a. On calcule :

$$g(e_1) = g(1, 0, 0) = (1, 0, -1) = e_1 - e_3$$

$$g(e_2) = g(0, 1, 0) = (1, 2, 1) = e_1 + 2e_2 + e_3$$

$$g(e_3) = g(0, 0, 1) = (-1, 0, 1) = -e_1 + e_3.$$

Ainsi,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- b. Un produit matriciel direct donne :

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 2B.$$

c.

- d. D'après 3.b, on a  $B^2 - 2B = 0$  donc  $X^2 - 2X$  est un polynôme annulateur de  $B$ . Il s'ensuit que les valeurs propres possibles pour  $B$  sont les racines de  $X^2 - 2X = X(X - 2)$ . Ainsi,

$$\text{Sp}(B) \subset \{0, 2\}.$$

Soit  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^3$ . On a

$$\begin{aligned} X \in E_0(B) &\Leftrightarrow BX = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X \in \text{Vect} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E_0(B) = \text{Vect} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

De même,

$$\begin{aligned} X \in E_2(B) &\Leftrightarrow BX = 2X \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 2x \\ 2y = 2y \\ -x + y + z = 2z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = y - z \\ &\Leftrightarrow X \in \text{Vect} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E_2(B) = \text{Vect} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

e. On a  $B \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$  et

$$\dim E_0(B) + \dim E_2(B) = 1 + 2 = 3$$

donc  $B$  est diagonalisable. La matrice  $B$  représentant l'endomorphisme  $g$ , on obtient :

$g$  est diagonalisable.

4. a. Montrons que  $\mathcal{E}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ .
- $\mathcal{E}$  est inclus dans  $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$  par définition.

- On a  $B \times 0_3 = 0_3 = 0_3 \times A$  donc  $0_3 \in \mathcal{E}$ .
- Fixons  $M, N \in \mathcal{E}$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$ , on a

$$\begin{aligned} B(\lambda M + N) &= \lambda BM + BN \\ &= \lambda MA + NA \quad (\text{car } M, N \in \mathcal{E}) \\ &= (\lambda M + N)A. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\lambda M + N \in \mathcal{E}$ .

En conclusion,

$\mathcal{E}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ .

- b.** Soit  $M$  une matrice appartenant à  $\mathcal{E}$ , on a donc  $BM = MA$ . Supposons que  $M$  est inversible. On peut alors réécrire la relation d'appartenance à  $\mathcal{E}$  comme :

$$A = M^{-1}BM.$$

Les matrices  $A$  et  $B$  sont ainsi semblables. Or on a vu en **3.d** que  $B$  est diagonalisable et en **2.b** que  $A$  ne l'est pas, une contradiction. Ainsi,

Si  $M \in \mathcal{E}$ , alors  $M$  n'est pas inversible.

- 5. a.** Le rang étant invariant par transposition, on a, pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,

$$\text{rg}(A - \lambda I_3) = \text{rg}({}^t(A - \lambda I_3)) = \text{rg}({}^tA - \lambda I_3).$$

- b.** On a observé en **2.b** et **3.c** que  $2 \in \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B)$ . Mais

$$\begin{aligned} \text{Sp}(A) &= \{\lambda \in \mathbf{R} \mid \text{rg}(A - \lambda I_3) < 3\} \\ &\stackrel{(5.a)}{=} \{\lambda \in \mathbf{R} \mid \text{rg}({}^tA - \lambda I_3) < 3\} \\ &= \text{Sp}({}^tA). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\alpha = 2 \in \text{Sp}({}^tA) \cap \text{Sp}(B).$$

- c.** On a  $X \in E_2(B)$  donc  $BX = 2X$  et  $Y \in E_2({}^tA)$  donc  ${}^tAY = 2Y$ . On a ainsi,

$$\begin{aligned} BN &= BX {}^tY \\ &= 2X {}^tY \\ &= 2N \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} NA &= X {}^tYA \\ &= X {}^t({}^tAY) \\ &= X {}^t(2Y) \\ &= 2X {}^tY \\ &= 2N. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$BN = NA \text{ et donc } N \in \mathcal{E}.$$

Il reste à montrer que  $N$  est non-nulle. On commence par observer que  $X$  et  $Y$  sont

non nuls, donc en particulier, si on pose  $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ , on a

$${}^tYY = [y_1, y_2, y_3] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^3 y_i^2 \neq 0.$$

Par l'absurde, supposons que  $N = 0_3$ , on a alors :

$$\begin{aligned} N = 0_3 &\Rightarrow NY = 0 \\ &\Rightarrow X {}^tYY = 0 \\ &\Rightarrow X \cdot \left( \sum_{i=1}^3 y_i^2 \right) = 0 \\ &\Rightarrow X = 0, \end{aligned}$$

une contradiction. Ainsi,

$$N \in \mathcal{E} \setminus \{0_3\}.$$

- d. On sait d'après **3.c** que  $E_2(B)$  est de dimension 2. Fixons une base  $(X_1, X_2)$  de  $E_2(B)$  et fixons un vecteur propre  $Y \in E_2({}^tA)$ . Il suit alors de la question **4.c** que  $N_1 = X_1 {}^tY$  et  $N_2 = X_2 {}^tY$  sont des éléments non nuls de  $\mathcal{E}$ . Montrons alors que la famille  $(N_1, N_2)$  est libre.

Soient  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$  tels que  $\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 = 0_3$ . On a alors

$$\begin{aligned} \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 = 0_3 &\Rightarrow \lambda_1 X_1 {}^tY + \lambda_2 X_2 {}^tY = 0_3 \\ &\Rightarrow (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) {}^tY = 0_3. \end{aligned}$$

$E_2(B)$  étant un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^3$ , si on pose  $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ , on a  $X \in E_2(B)$  et  $X {}^tY = 0_3$ . Il suit alors de la question **4.c** que  $X = 0$  et donc  $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 = 0$ . La famille  $(X_1, X_2)$  étant une base de  $E_2(B)$ , elle est en particulier libre et donc  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

Ainsi,  $(N_1, N_2)$  est une famille libre formée de deux vecteurs de  $\mathcal{E}$ . Il s'ensuit que :

$$\dim \mathcal{E} \geq 2.$$

## Exercice n°2

### Partie A

1. La continuité de  $f$  sur  $] -\infty; 0[ \cup ]0; 1[$  est claire au vu de l'expression sur cet ensemble. On vérifie la continuité de  $f$  en 0 avec l'équivalent classique  $\ln(1-t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -t$  :

$$\frac{-\ln(1-t)}{t} \underset{0}{\sim} \frac{-(-t)}{t} = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 1 = f(0).$$

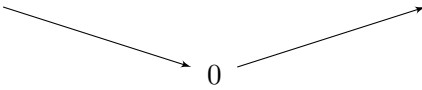
La fonction  $f$  est donc continue sur  $] -\infty; 1[$ .

2. (a) Étudions les variations de la fonction  $g : \begin{cases} ] -\infty; 1[ & \rightarrow \mathbf{R} \\ t & \mapsto \frac{t}{1-t} + \ln(1-t) \end{cases}$ .

Elle est dérivable avec :

$$\forall t < 1, \quad g'(t) = \frac{(1-t) + t}{(1-t)^2} + \frac{-1}{1-t} = \frac{1 - (1-t)}{(1-t)^2} = \frac{t}{(1-t)^2}$$

d'où son tableau de variations :

|         |                                                                                     |     |     |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----|
| $x$     | $-\infty$                                                                           | $0$ | $1$ |
| $g'(x)$ | $-$                                                                                 | $0$ | $+$ |
| $g$     |  |     |     |

Il n'est pas nécessaire de calculer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et en  $1^-$  (elles valent  $+\infty$ ).

On en déduit que la fonction  $g$  est positive, c'est-à-dire :

$$\forall t < 1, \quad \frac{t}{1-t} + \ln(1-t) \geq 0.$$

- (b) L'expression définissant  $f$  est clairement de classe  $\mathcal{C}^1$  sur les deux intervalles  $] -\infty; 0[$  et  $]0; 1[$ .

Pour tout  $t \in ] -\infty; 0[ \cup ]0; 1[$  :

$$f'(t) = \frac{\frac{1}{1-t} \times t + \ln(1-t)}{t^2} = \frac{g(t)}{t^2}.$$

- (c) Comme  $g$  est positive, on obtient :

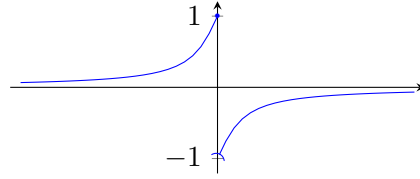
$$\forall ] -\infty; 0[ \cup ]0; 1[, \quad f'(t) \geq 0.$$

La fonction  $f$  est donc croissante sur chacun des deux intervalles  $] -\infty; 0[$  et  $]0; 1[$ .

Comme de plus,  $f$  est continue en 0, on obtient que  $f$  est croissante sur  $] -\infty; 1[$ .

Il est important ici de rappeler la continuité de  $f$ .

Exemple d'une fonction continue sur  $\mathbf{R}^*$ , croissante sur  $] -\infty; 0[$  et sur  $] 0; +\infty[$ , mais pas croissante sur  $\mathbf{R}^*$ .



3. (a) Le cours nous donne :

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

En remplaçant  $t$  par  $-t$  :

$$\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

- (b) Il existe donc une fonction  $\varepsilon : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  telle que  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$  et :

$$\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} + t^2 \varepsilon(t).$$

On a donc :

$$\frac{-\ln(1-t)}{t} = 1 + \frac{t}{2} - t\varepsilon(t).$$

Ainsi, la fonction  $f$  admet un développement limité d'ordre 1 en 0,

ce qui prouve qu'elle est dérivable en 0 avec  $f'(0) = \frac{1}{2}$ .

- (c) Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -\infty; 0[ \cup ] 0; 1[$  et dérivable en 0, il reste à montrer que  $f'$  est continue en 0.

On reprend l'expression de  $f'(t)$  calculée en 2.b. :

$$\forall t \in ] -\infty; 0[ \cup ] 0; 1[, \quad f'(t) = \frac{1}{t^2} \left( \frac{t}{1-t} + \ln(1-t) \right)$$

Utilisons le développement limité en 0 à l'ordre 2 de  $\ln(1-t)$  (déterminé en 3.b.) ainsi que celui, connu, de  $\frac{1}{1-t}$  en 0 à l'ordre 1.

Il existe  $\varepsilon$  et  $\zeta$ , fonctions qui tendent vers 0 en 0, telles que :

$$\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} + t^2 \varepsilon(t) \quad ; \quad \frac{1}{1-t} = 1 + t + t\zeta(t)$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= \frac{1}{t^2} \left( t(1+t+t\zeta(t)) - t - \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t) \right) \\
 &= \frac{1}{t^2} \left( t + t^2 + t^2\zeta(t) - t - \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t) \right) \\
 &= \frac{1}{t^2} \left( \frac{t^2}{2} + t^2(\varepsilon(t) + \zeta(t)) \right) \\
 &= \frac{1}{2} + \underbrace{\varepsilon(t)}_{\rightarrow_{t \rightarrow 0} 0} + \underbrace{\zeta(t)}_{\rightarrow_{t \rightarrow 0} 0} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} = f'(0).
 \end{aligned}$$

On a ainsi prouvé la continuité de  $f'$  en 0.

Finalement,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -\infty; 1[$ .

4. • Limite de  $f$  en  $-\infty$ .

Par croissances comparées,  $\ln(u) = \underset{u \rightarrow +\infty}{o}(u)$  donc  $\ln(u) = \underset{u \rightarrow +\infty}{o}(1-u)$ . Ainsi :

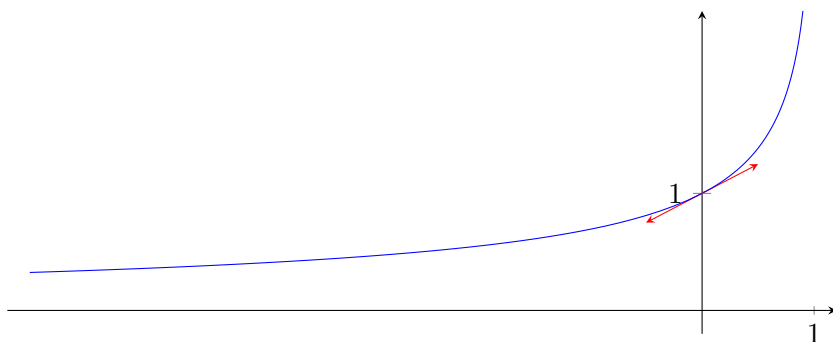
$$\ln(1-t) = \underset{t \rightarrow -\infty}{o}(t) \quad \text{donc} \quad f(t) = -\frac{\ln(1-t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0.$$

- Limite de  $f$  en 1.

On a  $\ln(1-t) \xrightarrow{t \rightarrow 1} -\infty$  donc :

$$f(t) = -\frac{\ln(1-t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} +\infty \quad (\text{de la forme } \ll \frac{+\infty}{1} \gg).$$

5.



## Partie B

6. La fonction  $L$  est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction continue  $f$ , donc est de classe  $\mathcal{C}^1$  avec :

$$\forall x < 1, \quad L'(x) = f(x).$$

7. (a) Soient  $A, B \in ]0, 1[$ . On effectue le changement de variable  $u = 1 - t$  :

$$\int_A^B f(t) dt = \int_A^B \frac{-\ln(1-t)}{t} dt = \int_{1-A}^{1-B} \frac{-\ln(u)}{1-u} (-du) = \int_{1-A}^{1-B} \frac{\ln(u)}{1-u} du.$$

- (b) Soient  $n \in \mathbf{N}$  et  $t \in ]0, 1[$ .

On utilise la formule donnant la somme des  $n + 1$  premiers termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^n t^k = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{1 - t} = \sum_{k=0}^n t^k + \frac{t^{n+1}}{1 - t}$$

et on multiplie chaque membre de cette égalité par  $-\ln(t)$  :

$$\frac{-\ln(t)}{1 - t} = \sum_{k=0}^n -t^k \ln(t) + \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1 - t}.$$

- (c) Soient  $x \in [0, 1]$ .

Les fonctions  $u$  et  $v$  définies sur le segment  $[x, 1]$  par :

$$\forall t \in [x, 1], \quad u(t) = -\frac{t^{k+1}}{k+1} \quad \text{et} \quad v(t) = \ln(t)$$

sont de classe  $\mathcal{C}^1$ . Leurs dérivées sont données par :

$$\forall t \in [x, 1], \quad u'(t) = -t^k \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{1}{t}$$

D'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_x^1 -t^k \ln(t) dt &= \left[ -\frac{t^{k+1}}{k+1} \ln(t) \right]_x^1 + \int_x^1 \frac{t^{k+1}}{k+1} \times \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{x^{k+1}}{k+1} \ln(x) + \frac{1}{k+1} \int_x^1 t^k dt \\ &= \frac{x^{k+1}}{k+1} \ln(x) + \frac{1}{k+1} \left[ \frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_x^1 \\ &= \frac{x^{k+1}}{k+1} \ln(x) + \frac{1}{(k+1)^2} (1 - x^{k+1}) \end{aligned}$$

Par croissances comparées,  $x^{k+1} \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ . On a aussi  $x^{k+1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ .  
On obtient alors :

$$\int_0^1 -t^k \ln(t) dt = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

- (d) Notons  $h : t \mapsto \frac{-t \ln(t)}{1 - t}$ .

- En  $0^+$  : le numérateur tend vers 0 (croissances comparées) et le dénominateur vers 1, donc :

$$h(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0.$$

- En  $1^-$  : avec l'équivalent  $\ln(t) = \ln(1+(t-1)) \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} t-1$  (puisque  $t-1 \xrightarrow{t \rightarrow 1^-} 0$ ), on a :

$$h(t) \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{-t(1-t)}{t-1} = t \quad \text{donc} \quad h(t) \xrightarrow{t \rightarrow 1^-} 1.$$

La fonction  $h$  est clairement continue sur  $]0, 1[$ .

Comme elle admet des limites finies aux bornes de cet intervalle, elle est prolongeable par continuité en 0 et en 1, donnant ainsi un prolongement  $\hat{h}$  continu sur le segment  $[0, 1]$ .

Or, toute fonction continue sur un segment est bornée.

Par conséquent,  $\hat{h}$  est bornée sur  $[0, 1]$  et donc  $h$  est bornée sur  $]0, 1[$ .

Comme  $h$  est en fait positive sur  $]0, 1[$ , on peut écrire :

$$\exists M \in \mathbf{R}, \quad \forall t \in ]0, 1[, \quad 0 \leq h(t) \leq M$$

d'où, en multipliant par  $t^n$  ( $\geq 0$ ) :

$$\forall t \in ]0, 1[, \quad 0 \leq \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t} \leq Mt^n$$

La fonction  $t \mapsto \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t}$  est continue et positive sur  $]0, 1[$ ; elle est majorée par une fonction intégrable entre 0 et 1. On en déduit qu'elle est elle-même intégrable entre 0 et 1, et par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t} dt \leq \int_0^1 Mt^n dt = \underbrace{\frac{M}{n+1}}_{\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0}.$$

Enfin, par le théorème d'encadrement :

$$\int_0^1 \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t} dt \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

(e) Soit  $n \in \mathbf{N}$ . D'après 7.b. :

$$\forall t \in ]0, 1[, \quad \frac{-\ln(t)}{1-t} = \sum_{k=0}^n -t^k \ln(t) + \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t}.$$

D'après 7.c. et 7.d., les intégrales

$$\int_0^1 -t^k \ln(t) dt \quad (\text{pour tout } k \in \mathbf{N}) \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t} dt$$

convergent.

Il en est donc de même de l'intégrale  $\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} dt$  ; en intégrant sur  $]0, 1[$  chaque membre de l'égalité de 7.b. et en utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} dt &= \sum_{k=0}^n \int_0^1 -t^k \ln(t) dt + \int_0^1 \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t} dt \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} + \int_0^1 \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t} dt \quad (\text{avec 7.c.}) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} + 0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \quad (\text{avec 7.d.}) \end{aligned}$$

Le nombre  $\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} dt$  ne dépendant pas de  $n$ , il est égal à cette limite :

$$\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}.$$

(f) Soit  $x \in ]0, 1[$ . Avec  $B = x$  dans la question 7.a. :

$$\int_A^x f(t) dt = \int_{1-x}^{1-A} \frac{-\ln(t)}{1-t} dt \xrightarrow{A \rightarrow 0^+} \int_{1-x}^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} dt$$

cette dernière intégrale étant bien convergente d'après la question précédente.

Donc :

$$L(x) = \int_{1-x}^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} dt \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} dt$$

avec la même justification.

On en déduit :

$$L(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi^2}{6}$$

ce qui prouve que  $L$  est prolongeable par continuité en 1 en posant  $L(1) = \frac{\pi^2}{6}$ .

8. (a) D'après la question 6.,  $L$  est dérivable sur  $]-\infty, 1[$ .

Or, pour tout  $x \in ]-1, 0[ \cup ]0, 1[$ , les nombres  $x$ ,  $-x$  et  $x^2$  sont dans cet intervalle  $]-\infty, 0[$ .

Avec les règles de dérivabilité des sommes et composées, la fonction  $x \mapsto L(x) + L(-x) + L(x^2)$  est dérivable sur  $]-1, 0[$  et sur  $]0, 1[$ .

En utilisant la dérivée de  $L$  donnée en 6. (c'est  $f$ ) et la formule de dérivation pour une composée :

$$\forall x \in ]-1, 0[ \cup ]0, 1[, \quad \left( L(x) + L(-x) + \frac{1}{2} L(x^2) \right)' = f(x) - f(-x) - x f(x^2).$$

(b) On utilise l'expression de  $f$  donnée en début d'exercice ; pour  $x \in ]-1, 0[ \cup ]0, 1[$  :

$$\begin{aligned} f(x) - f(-x) - xf(x^2) &= \frac{-\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1+x)}{x} - x \times \frac{\ln((1-x)^2)}{x^2} \\ &= \frac{-\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{\ln((1-x)(1+x))}{x} \\ &= \frac{-\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{\ln(1-x) + \ln(1+x)}{x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi la fonction  $x \mapsto L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L(x^2)$  est de dérivée nulle sur  $] -1, 0[ \cup ]0, 1[$  donc est constante sur  $] -1, 0[$  et sur  $]0, 1[$ .

Cette fonction étant de plus continue en 0 car  $L$  l'est, elle est en fait constante sur  $] -1, 1[$ .

Enfin, cette fonction est continue sur  $[-1, 1]$  (car  $L$  est continue en  $-1$  et en  $1$ ) et y est donc constante.

La valeur de cette constante est 0 car  $L(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0$ .

En conclusion :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}L(x^2).$$

( \* On notera que, lorsqu'une fonction est constante sur un ensemble de la forme  $I \setminus \{a\}$  où  $I$  est un intervalle et  $a$  un élément de  $I$  qui n'est pas une borne, la constante sur chaque « morceau » n'est pas la même a priori, sauf s'il y a continuité en  $a$  de la fonction.)

(c) En appliquant ceci à  $x = 1$  (ou  $x = -1$  au choix) :

$$L(1) + L(-1) = \frac{1}{2}L(1) \quad \text{donc} \quad L(-1) = -\frac{1}{2}L(1) = -\frac{\pi^2}{12}.$$

## Exercice n°3

### Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

1. a. Notons, pour tout  $i \in \mathbf{N}$ ,  $P_i$  l'événement : « Obtenir pile au  $i$ -ème lancer » et  $F_i = \overline{P_i}$ . On a alors

$$(X = 0) = P_1 \cap P_2$$

$$(X = 1) = (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3)$$

$$(X = 2) = (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4).$$

En effet, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $(X = n)$  signifie que l'on a obtenu  $n$  Face et deux Pile, le second au  $(n+2)$ -ème lancer et le premier à l'un des  $(n+1)$  rangs précédents. On obtient donc

$$\begin{cases} \mathbf{P}(X=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, \\ \mathbf{P}(X=1) = 2 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}, \\ \mathbf{P}(X=2) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}. \end{cases}$$

- b. Comme observé à la question précédente, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $(X = n)$  signifie que l'on a obtenu  $n$  Face et deux Pile, le second au  $(n+2)$ -ème lancer, le premier à l'un des  $(n+1)$  rangs précédents. Formellement :

$$(X = n) = \left[ \bigcup_{i=1}^{n+1} \left( P_i \cap \left( \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} F_j \right) \right) \right] \cap P_{n+2}.$$

Par incompatibilité et par indépendance des lancers, il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = n) &= \left( \sum_{i=1}^{n+1} \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) \times \frac{2}{3} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{4}{3^{n+2}} \\ &= (n+1) \frac{4}{3^{n+2}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}(X = n) = (n+1) \frac{4}{3^{n+2}}.$$

## Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

2. a.  $U$  prend clairement des valeurs entières positives et, pour chaque entier  $n$ , il existe une suite de tirages amenant à  $n$  Face et 2 Pile suivi d'un tirage de la boule numérotée  $n$ . Autrement dit,

$$U(\Omega) = \mathbf{N}.$$

- b. Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Sachant  $(X = n)$ , l'urne est composée de  $(n+1)$  boules indiscernables au toucher numérotées de 0 à  $n$  donc

$$U^{(X=n)} \rightsquigarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket).$$

- c. Soit  $k \in \mathbf{N}$ . On commence par observer que  $(U = k) \cap (X = n) = \emptyset$  si  $n < k$  car on ne peut pas tirer une boule numérotée  $k$  dans une urne contenant des boules numérotées de 0 à  $n$  si  $k > n$ . Ainsi en appliquant la formule des probabilités totales relativement au système complet d'événements  $\{(X = n)\}_{n \in \mathbf{N}}$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(U = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(U = k, X = n) \\
 &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbf{P}(U = k, X = n) \\
 &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbf{P}_{(X=n)}(U = k) \mathbf{P}(X = n) \\
 &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \mathbf{P}(X = n) \quad (\text{d'après 2.b}),
 \end{aligned}$$

ce qui établit la première égalité.

En injectant le résultat trouvé en 1.b, il vient

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(U = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \times (n+1) \frac{4}{3^{n+2}} \\
 &= 4 \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+2}} \\
 &= 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+k+2}} \\
 &= \frac{4}{3^{k+2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \\
 &= \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{1}{1 - 1/3} \\
 &= \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}(U = k) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

- d.  $U$  admet une espérance si et seulement si la série  $\sum_{k \geq 0} k \mathbf{P}(U = k)$  converge absolument. Les valeurs prises par  $U$  étant positives, ceci équivaut à la convergence de la

série. Or,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \geq 0} k \mathbf{P}(U = k) &= \sum_{k \geq 0} k \frac{2}{3^{k+1}} \\
 &= \sum_{k \geq 1} k \frac{2}{3^{k+1}} \\
 &= \frac{2}{9} \sum_{k \geq 1} k \frac{1}{3^{k-1}} \\
 &= \frac{2}{9} \sum_{k \geq 1} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.
 \end{aligned}$$

On reconnaît le terme général d'une série géométrique dérivée de raison  $1/3$ . La série converge donc et alors

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}[U] &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbf{P}(U = k) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{2}{3^{k+1}} \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{2}{3^{k+1}} \\
 &= \frac{2}{9} \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{1}{3^{k-1}} \\
 &= \frac{2}{9} \times \frac{1}{(1 - 1/3)^2} \\
 &= \frac{2}{9} \times \frac{9}{4} \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbf{E}[U] = \frac{1}{2}.$$

Pour déterminer la variance, on commence par étudier l'espérance de  $U(U - 1)$ . On a

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \geq 0} k(k - 1) \mathbf{P}(U = k) &= \sum_{k \geq 2} k(k - 1) \frac{2}{3^{k+1}} \\
 &= \frac{2}{27} \sum_{k \geq 2} k(k - 1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}.
 \end{aligned}$$

On reconnaît une série géométrique dérivée deux fois de raison  $1/3$ , il s'agit donc d'une série convergente, et plus précisément absolument convergente puisque ses

termes sont positifs. Il suit donc du théorème de transfert que  $U(U - 1)$  admet une espérance et

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[U(U - 1)] &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k - 1) \mathbf{P}(U = k) \\ &= \frac{2}{27} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k - 1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \\ &= \frac{2}{27} \times \frac{2}{(1 - 1/3)^3} \\ &= \frac{2}{27} \times \frac{2 \times 27}{8} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Mais alors  $U^2 = U^2 - U + U = U(U - 1) + U$  admet une espérance comme somme de variables aléatoires admettant une espérance et

$$\mathbf{E}[U^2] = \mathbf{E}[U(U - 1)] + \mathbf{E}[U] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Il suit alors de la formule de Koenig-Huygens que :

$$VU = \mathbf{E}[U^2] - \mathbf{E}[U]^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

3. a.  $V$  prend clairement des valeurs entières positives ou nulles et, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , il existe un tirage amenant à  $n$  Face et deux Pile suivi d'un tirage de la boule 0, auquel cas  $(V = n)$  est réalisé. Ainsi,

$$V(\Omega) = \mathbf{N}.$$

- b. Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Alors  $V^{(X=n)}$  prend ses valeurs entre 0 et  $n$  et, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{(X=n)}(V = k) &= \mathbf{P}_{(X=n)}(X - U = k) \\ &= \mathbf{P}_{(X=n)}(U = n - k) \\ &= \frac{1}{n + 1}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$V^{(X=n)} \rightsquigarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket).$$

- c. En reprenant les calculs effectués en 2.b, on observe que la loi de  $V$  est la même que celle de  $U$ . Autrement dit,

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}(V = k) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

4. Soient  $k, l \in \mathbf{N}$ . On a

$$(U = k, V = \ell) = (U = k, X - U = \ell) = (U = k, X = k + \ell).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(U = k, V = \ell) &= \mathbf{P}(U = k, X = k + \ell) \\ &= \mathbf{P}_{(X=k+\ell)}(U = k) \times \mathbf{P}(X = k + \ell) \\ &= \frac{1}{k + \ell + 1} \times (k + \ell + 1) \frac{4}{3^{k+\ell+2}} \\ &= \frac{4}{3^{k+\ell+2}} \\ &= \frac{2}{3^{k+1}} \times \frac{2}{3^{\ell+1}} \\ &= \mathbf{P}(U = k) \mathbf{P}(V = \ell). \end{aligned}$$

Ainsi,

$U$  et  $V$  sont indépendantes.

5.  $U$  et  $V$  étant indépendantes d'après 4, il vient

$$\text{Cov}(U, V) = 0.$$

Alors  $\text{Cov}(X, U) = \text{Cov}(V + U, U) = \text{Cov}(V, U) + \text{Cov}(U, U) = V(U) = \frac{3}{4}.$

### Partie III : Étude d'un jeu

#### 6. Simulation informatique

a. On propose la fonction suivante :

---

```
def simule_X():
    nPile = 0
    nFace = 0
    while (nPile < 2):
        if (rd.rand() < 2/3):
            nPile = nPile + 1
        else:
            nFace = nFace + 1

    return (nFace)
```

---

- b. La fonction proposée dans l'énoncé calcule la fréquence, sur 10 000 simulations, des victoires de  $A$ .
- c. On observe que pour  $p \approx 0,8$ , on obtient une fréquence de victoires de  $A$  approximativement égale à 50%. Ainsi :

Le jeu est équilibré pour  $p \approx 0,8$ .

## 7. Étude de la variable aléatoire $Y$

- a.  $Z$  compte le rang du premier succès (« obtenir Pile ») dans une suite indéfinie de répétitions d'expériences de Bernoulli indépendantes (lancer la pièce), de même paramètre ( $p$ , la probabilité de faire Pile). Ainsi,

$$Z \rightsquigarrow \mathcal{G}(p).$$

- b.  $Y$  étant le nombre de Face obtenus jusqu'au premier Pile, on a la relation  $Y = Z - 1$ . Il s'ensuit que  $Y$  admet une espérance et une variance et que

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[Z - 1] = \mathbf{E}[Z] - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$$

et

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(Z - 1) = \mathbf{V}(Z) = \frac{1-p}{p^2}.$$

- c. Posons  $q = 1 - p$ . On a, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y \geq n) &= \mathbf{P}(Z - 1 \geq n) \\ &= \mathbf{P}(Z \geq n + 1) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(Z = k) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} pq^{k-1} \\ &= pq^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^{k-(n+1)} \\ &= pq^n \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \\ &= pq^n \times \frac{1}{1-q} \\ &= q^n. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}(Y \geq n) = (1-p)^n.$$

8. a. En appliquant la formule des probabilités totales relativement au système complet d'événements  $\{(X = n)\}_{n \in \mathbf{N}}$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X \leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n, X \leq Y) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n, Y \geq n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) \mathbf{P}(Y \geq n) \quad (\text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbf{P}(X \leq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) \mathbf{P}(Y \geq n).$$

- b. En injectant les résultats établis en 1.b et 7.c dans la formule trouvée en 8.a, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X \leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) \mathbf{P}(Y \geq n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{4}{3^{n+2}} q^n \\ &= \frac{4}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{q}{3}\right)^n \\ &= \frac{4}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{q}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{4}{9} \times \frac{1}{(1 - q/3)^2} \\ &= \frac{4}{9} \times \left(\frac{3}{3-q}\right)^2 \\ &= \frac{4}{(3-q)^2} \\ &= \frac{4}{(2+p)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbf{P}(X \leq Y) = \frac{4}{(2+p)^2}.$$

c. Le jeu est équilibré quand  $\mathbf{P}(X \leq Y) = \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire quand  $\frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2}$ . Or

$$\begin{aligned}\frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow 8 = (2+p)^2 \\ &\Leftrightarrow p^2 + 4p - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow p \text{ est racine de } X^2 + 4X - 4 \\ &\Leftrightarrow p \in \left\{-2 - 2\sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2}\right\}.\end{aligned}$$

Mais  $-2 - 2\sqrt{2} < 0$  et  $-2 + 2\sqrt{2} > 0$  et  $p$  est nécessairement positif. Ainsi,

Le jeu est équitable pour  $p = 2\sqrt{2} - 2$ .

*Remarque :* On a  $\sqrt{2} \approx 1,41$  donc  $2\sqrt{2} - 2 \approx 0,82$ , ce qui est cohérent avec la réponse déterminée numériquement à la question **6.c**.