

Option Économique

MATHÉMATIQUES

17 Novembre 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Les questions précédées de (*) sont destinées aux cubes.

Exercice n°1

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère également l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad g(x, y, z) = (x + y - z, 2y, -x + y + z).$$

Enfin, on pose :

$$u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0) \quad \text{et} \quad v = f(e_1) + e_1.$$

1.
 - a. Calculer v .
 - b. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
 - c. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.
Expliciter la matrice P et calculer P^{-1} .
2.
 - a. Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{C}$.
 - b. (*) En déduire les valeurs propres de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
 - c. L'endomorphisme f est-il bijectif ?
 - d. Expliciter, sans justification, le lien entre les matrices A , A' , P et P^{-1} .
3.
 - a. Déterminer la matrice B de g dans la base $\mathcal{B}$.
 - b. Montrer : $B^2 = 2B$.
 - c. (*) En déduire les valeurs propres de g .
 - d. Déterminer une base des sous-espaces $\text{Ker}(B)$ et $E_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid BX = 2X\}$.

e. (*) L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

On pose : $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MA\}$.

4. a. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.

b. Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{E}$.

Montrer que M n'est pas inversible. (On pourra raisonner par l'absurde).

5. On cherche à montrer que $\mathcal{E}$ n'est pas réduit à l'ensemble $\{0\}$.

a. Justifier que, pour tout réel λ , les matrices $A - \lambda I_3$ et ${}^tA - \lambda I_3$ ont même rang, la matrice I_3 désignant la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b. (*) En déduire que les matrices B et tA admettent une valeur propre en commun, notée α .

c. Soient X un vecteur propre de B associé à la valeur propre α , i.e $BX = \alpha X$, et Y un vecteur propre de tA associé à la valeur propre α , i.e ${}^tAY = \alpha Y$. On note : $N = X {}^tY$.

Montrer que la matrice N est non nulle et que N appartient à $\mathcal{E}$.

d. En déduire : $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$.

Exercice n°2

PARTIE A :

On considère la fonction f définie sur $]-\infty; 1[$ par :

$$\forall t \in]-\infty; 1[, \quad f(t) = \begin{cases} \frac{-\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \in]-\infty; 0[\cup]0; 1[, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $]-\infty; 1[$.

2. a. Montrer : $\forall t \in]-\infty; 1[, \frac{t}{1-t} + \ln(1-t) \geq 0$.

b. Justifier que f est de classe C^1 sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; 1[$ et déterminer f' sur ces intervalles.

c. En déduire la monotonie de f sur $]-\infty; 1[$.

3. a. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $t \mapsto \ln(1-t)$.

b. Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \frac{1}{2}$.

c. Montrer enfin que f est de classe C^1 sur $]-\infty; 1[$.

4. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en 1.

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé en faisant apparaître la tangente en 0.

PARTIE B :

On considère maintenant la fonction L définie sur $]-\infty; 1[$ par :

$$\forall x \in]-\infty; 1[, \quad L(x) = \int_0^x f(t) dt$$

On rappelle que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge et on admet : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

6. Justifier que L est de classe C^1 sur $]-\infty; 1[$ et préciser L' sur $]-\infty; 1[$.

7. Etude de L en 1 :

a. Montrer, à l'aide d'un changement de variable :

$$\forall (A, B) \in]0; 1[^2, \quad \int_A^B f(t) dt = \int_{1-B}^{1-A} \frac{-\ln(t)}{1-t} dt$$

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in]0; 1[, \quad \frac{-\ln(t)}{1-t} = \sum_{k=0}^n -t^k \ln(t) + \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t}$.

c. Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 -t^k \ln(t) dt$ converge et :

$$\int_0^1 -t^k \ln(t) dt = \frac{1}{(k+1)^2}$$

d. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{-t \ln(t)}{1-t}$ est bornée sur $]0; 1[$.

(On pourra commencer par calculer les limites en 0 et en 1).

En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t} dt$ converge puis montrer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t} dt = 0.$$

e. À l'aide de la question 7.b, montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} dt$ converge puis que l'on a :

$$\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

f. En déduire que L est prolongeable par continuité en 1 en posant $L(1) = \frac{\pi^2}{6}$.

On note encore L la fonction ainsi prolongée en 1.

8. a. Justifier que la fonction $x \mapsto L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L(x^2)$ est dérivable sur $] -1, 0[$ et sur $]0, 1[$ et calculer sa dérivée sur ces intervalles.

b. En déduire : $\forall x \in [-1, 1], L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}L(x^2)$.

c. Préciser alors la valeur de $L(-1)$.

Exercice n°3

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile. On note P_i , pour $i \in \mathbb{N}^*$, l'évènement "obtenir Pile au i -ème lancer.

1. a. Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ puis calculer leurs probabilités.

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, P([X = n]) = (n+1) \frac{4}{3^{n+2}}$.

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n + 1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule dans cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose $V = X - U$.

2.
 - a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire U .
 - b. Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.
 - c. En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$P([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P([X = n]) \quad \text{puis} \quad P([U = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

- d. Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.
3.
 - a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V .
 - b. Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.
 - c. En déduire la loi de V .
4. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.
5. (*) Que vaut $Cov(U, V)$? En déduire $Cov(X, U)$.

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0; 1[$.

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- Le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

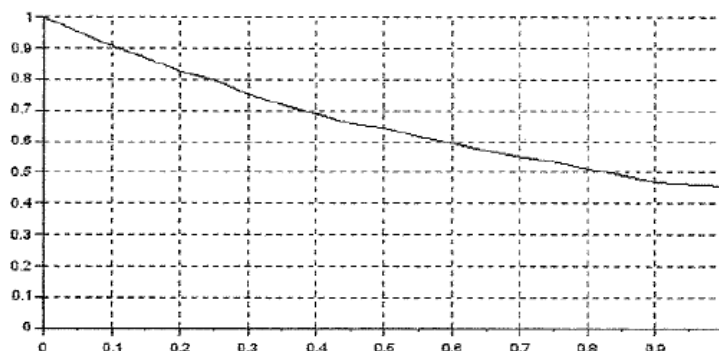
On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

6. Simulation informatique

- a. Écrire une fonction Python d'en-tête `def simule_X()` qui simule la variable aléatoire X .
- b. On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel p de $]0; 1[$, simule la variable aléatoire Y . Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```
def mystere(p):  
    r=0  
    N=10**4  
    for k in range(1,N+1):  
        x=simule_X()  
        y=simule_Y(p)  
        if X <=Y:  
            r=r+1/N  
    return(r)
```

- c. On trace, en fonction de p , une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour lequel le jeu serait équilibré.

7. Étude de la variable aléatoire Y

On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B .

- a. Reconnaître la loi de Z et préciser son(ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.
 - b. Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.
 - c. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P([Y \geq n]) = (1 - p)^n$.
8. a. Montrer : $P([X \leq Y]) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([X = n]) P([Y \geq n])$.
- b. Déduire des résultats précédents : $P([X \leq Y]) = \frac{4}{(2 + p)^2}$.
- c. Déterminer la valeur de p pour laquelle le jeu est équilibré.