

Couples de variables aléatoires discrètes 2

Dans tout la suite les variables aléatoires discrètes sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

I. Fonctions de variables aléatoires discrètes

Proposition 1.1

Soit X et Y deux variables aléatoires. Soit f une fonction à valeurs réelles telle que $f(x, y)$ soit défini pour tout $x \in X(\Omega)$ et pour tout $y \in Y(\Omega)$.

Alors $f(X, Y)$ est une variable aléatoire discrète définie sur Ω .

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants expliciter qu'elle la fonction f

- $\max(X, Y)$ est une vad on pose $f(., .) =$ • $X + Y$
- $\min(X, Y)$ est une vad on pose $f(., .) =$ • XY

Théorème 1.2 — Théorème de transfert

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes et $g(x, y)$ une fonction définie sur l'ensemble $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Alors

$$E(g(X, Y)) = \sum_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$$

sous réserve que cette dernière série converge absolument.



Méthode :

- **Calculer la loi d'un maximum :**

Pour calculer la loi de $\max(X, Y)$ on peut remarquer que pour tout réel x

$$[\max(X, Y) \leq x] = [X \leq x] \cap [Y \leq x]$$

Si de plus X et Y sont **indépendantes** alors $P(\max(X, Y) \leq x) = P(X \leq x) P(Y \leq x)$.

Ce qui permet de calculer la fonction de répartition.

- **Calculer la loi d'un minimum :**

Pour calculer la loi de $\min(X, Y)$ on peut remarquer que pour tout réel x

$$[\min(X, Y) > x] = [X > x] \cap [Y > x]$$

Si de plus X et Y sont **indépendantes** alors $P(\min(X, Y) > x) = P(X > x) P(Y > x)$.

Et en utilisant $P(\square \leq x) = 1 - P(\square > x)$ on retrouve la fonction de répartition.

Exercice 2

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes, suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Calculer la loi du maximum et du minimum de X et Y



Méthode :

Pour calculer la loi d'une somme $X + Y$:

- On remarque que pour tout entier naturel

$$[X + Y = n] = \bigcup_{k=0}^n ([X = k] \cap [Y = n - k]) = \bigcup_{k=0}^n ([X = n - k] \cap [Y = k]) = \bigcup_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n \\ i+j=n}} ([X = i] \cap [Y = j])$$

- Ces événements entre parenthèses sont incompatibles deux-à-deux.
- Si de plus X et Y sont **indépendantes** alors

$$P(X + Y = n) = \sum_{k=0}^n P(X = k) P(Y = n - k)$$



Attention:

Il faut adapter les indices des $\sum$ précédentes au support de X et Y

Lemme 1.3 — Égalité de Vandermonde

Soit m, n et k trois entiers naturels alors

$$\sum_{j=0}^k \binom{m}{j} \binom{n}{k-j} = \binom{n+m}{k}$$

Démonstration.

□

Théorème 1.4

- Somme de deux lois binomiales « avec le même p »** : Soit n_1 et n_2 deux entiers naturels et $p \in]0, 1[$. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$. On suppose de plus que X et Y sont indépendantes. Alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$$

- Somme de deux lois de Poisson** : Soit λ_1 et λ_2 deux réels strictement positifs. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$. On suppose de plus que X et Y sont indépendantes. Alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

- Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, alors

$$\sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow$$

Démonstration. À savoir faire

□

II. Covariance d'un couple de variables aléatoires

II. 1 Indépendance et conséquences

Définition 2.1 — Rappel : indépendance de deux variables aléatoires discrètes

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace. probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On dit que X et Y sont *indépendantes* si et seulement si

$$\forall x \in X(\Omega) \quad \forall y \in Y(\Omega) \quad P([X = x] \cap [Y = y]) = P([X = x]) P([Y = y])$$

Proposition 2.2 — Rappel espérance d'une somme : linéarité de l'espérance

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes ^a admettant une espérance alors $X + Y$ admet une espérance et

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Plus généralement si α et β sont des réels $\alpha X + \beta Y$ admet une espérance et

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$$

^a. non nécessairement indépendantes

Proposition 2.3 — Espérance d'un produit

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes **indépendantes** admettant une espérance telle que XY admet une espérance alors

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$



Attention:



Quelle sont les différences entre les hypothèses de ces deux théorèmes ?

Démonstration.

□

II. 2 Covariance

Définition 2.4 — Covariance

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. On note alors

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Exercice 3

Soit X et Y deux variables aléatoires dont la loi du couple est

X/Y	1	2	3	loi de X
1	1/6	1/6	1/6	1/2
2	1/6	1/6	1/6	1/2
loi de Y	1/3	1/3	1/3	1

Calculer la covariance.

Proposition 2.5 — Propriétés de la covariance

Soit X, Y et Z trois variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2. Soit α et β deux réels.

1. **Symétrie** : $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$.
2. **La variance comme covariance** $\text{Cov}(X, X) = V(X)$
3. **Linéarité à gauche** $\text{Cov}(\alpha X + \beta Y, Z) = \dots$
4. **Linéarité à droite** $\text{Cov}(X, \alpha Y + \beta Z) = \dots$
5. Les deux dernières propriétés peuvent être regroupées en **bilinéarité**.

Exercice 4 — Calculs classiques

X et Y sont deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. Simplifier les expressions suivantes

1. $\text{Cov}(X + Y, X + Y)$
2. $\text{Cov}(X + Y, X - Y)$
3. $\text{Cov}(X - Y, X - Y)$

Proposition 2.6 — Variable presque certaine

Soit c une constante (ou une variable aléatoire presque certaine égale à c). Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2.

- $\text{Cov}(X, c) = 0$
- $\text{Cov}(X + c, Y) = \text{Cov}(X, Y)$

Théorème 2.7 — Formule de Huygens

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. Alors

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Démonstration.

□

Proposition 2.8 — Lien entre covariance et indépendance

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. Si X et Y sont indépendantes alors

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$

**Attention:**

La réciproque est fausse!!

Exercice 5

Soit X et Y deux variables aléatoires dont la loi du couple est donnée ci-dessous. Calculer la covariance de (X, Y) .

X/Y	-1	1	loi de X
0	1/3	1/3	
1	0	1/3	
loi de Y			1

Proposition 2.9 — Variance d'une somme

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. Soit α et β deux réels

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

$$V(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 V(X) + \beta^2 V(Y) + 2\alpha\beta \text{Cov}(X, Y)$$

Remarques :

R1 – On sait que si X et Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$, ainsi :

R2 – On peut généraliser ce résultat. Si $X_1, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes :

Exercice 6

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2.

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $V(X + tY) = V(X) + 2\text{cov}(X, Y)t + V(Y)t^2$.
2. On note $P : t \mapsto V(X + tY)$. Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t) \geq 0$. En déduire, à l'aide d'une considération sur un discriminant, que

$$\left| \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \right| \leq 1$$

Remarque :

La deuxième question permet d'énoncer le résultat suivant, appelé *Inégalité de Cauchy-Schwarz* :

Définition 2.10 — Coefficient de corrélation linéaire

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2 et un écart-type non nul. On définit le coefficient de corrélation linéaire

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Où σ_X et σ_Y sont les écarts types de X et Y .

Proposition 2.11 — Cauchy-Schwarz

Soit X et Y deux variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2 alors

$$|\rho(X, Y)| \leq 1$$

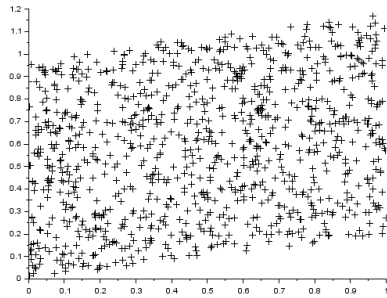
De plus il y' a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si il existe a et b deux constantes telles que

$$X = aY + b \quad \text{ou} \quad Y = aX + b$$

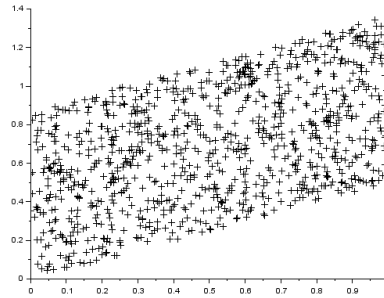
Exemple :

Soit X et Y deux variables indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $Z = \rho X + \sqrt{1 - \rho^2}Y$, $\rho \in]-1, 1[$.

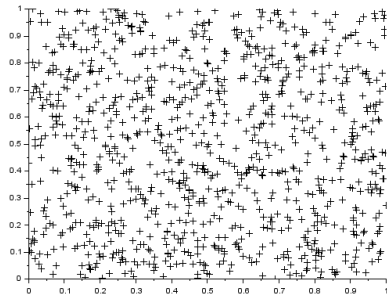
1. On calcule le coefficient de corrélation $\rho(X, Z)$.
2. Voici, selon les valeurs différentes de ρ , le nuage de points (X, Z) .



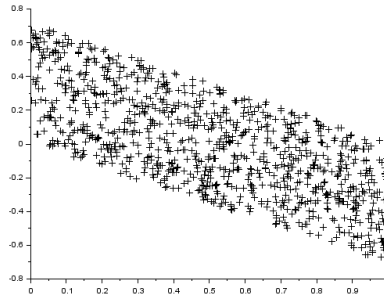
$\rho = 0,2$



$\rho = 0,5$



$\rho = 0$



$\rho = -0,7$

Remarque :

Autrement dit, le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est un réel compris entre -1 et 1 : $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$

- Il est égal à 1 dans le cas où l'une des variables est fonction affine croissante de l'autre variable.
- Il est égal à -1 dans le cas où l'une des variables est fonction affine décroissante de l'autre variable.
- Les valeurs intermédiaires renseignent sur le degré de dépendance linéaire entre les deux variables.
- Plus le coefficient $\rho_{X,Y}$ est proche des valeurs extrêmes -1 et 1, plus la corrélation entre les variables est forte.
- Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle (et donc le coefficient de corrélation linéaire est nul) sont dites **non corrélées**.
- Une corrélation positive ($\rho_{X,Y} > 0$) indique que les variables X et Y varient dans le même sens.
- Une corrélation négative ($\rho_{X,Y} < 0$) indique que les variables X et Y varient en sens inverse.

III. Suites de variables aléatoires discrètes.

Dans cette partie toutes les variables aléatoires sont discrètes et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

III. 1 Indépendance

Définition 3.1 — indépendance mutuelle de n variables aléatoires discrètes

Soit $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires. On dit qu'elles sont **mutuellement indépendantes** si et seulement si

$$\forall x_1 \in X_1(\Omega), \forall$$

$$P \left(\bigcap [X_i = x_i] \right) =$$

Définition 3.2

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite infinie de variables aléatoires discrètes. On dit que ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour tout partie $I \subset \mathbb{N}$ finie les variables $(X_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendantes au sens précédent.

Proposition 3.3 — Lemme des coalitions

- Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendante et si f et g sont deux fonctions numériques définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.
- Soient $X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes et soit $p \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$. Alors toute variable aléatoire fonction des variables $X_1, \dots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des variables $X_{p+1}, \dots, X_n$.

Exemple :

Si X_1, X_2 et X_3 sont mutuellement indépendantes alors X_1 est indépendante de $\max(X_2, X_3)$

Proposition 3.4 — Espérance et variance d'une somme

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$, n variables aléatoires qui admettent des espérances. Alors $(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ admet une espérance et

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) =$$

Si de plus ces variables aléatoires sont **mutuellement indépendantes** et admettent des moment d'ordre 2, alors $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ admet un moment d'ordre 2 et :

$$V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) =$$

Proposition 3.5 — variance d'une somme : cas général

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$, n variables aléatoires qui admettent des moment d'ordre 2

$$V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

Et on sait que la somme $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$ comporte $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ termes.

On peut également généraliser les résultats de stabilité vus précédemment :

- Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont n variables indépendantes suivant une loi de Poisson, $X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_i)$, alors

$$\sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow$$

- Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont n variables indépendantes suivant une loi Binomiale, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n_i, p)$, alors

$$\sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow$$