Composite

E C G

Correction Concours Blanc n°2

Option Économique

MATHÉMATIQUES

6 Janvier 2025

Exercice n°1 - EML 2019

Partie A : Premier exemple

1. A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale, ainsi $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \left\{\frac{1}{2}, 1, 2\right\}}$.

   A est une matrice carrée d'ordre 3 admettant trois valeurs propres distinctes, donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$.
   Enfin 0 n'est pas valeur propre de A donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$.

2. On cherche les sous-espaces propres de A. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_{1/2}(A) \iff \left(A - \frac{1}{2}I_3\right)X = 0 \iff \begin{cases} x/2 - y + z = 0\,, \\ 0 = 0\,, \\ 3z/2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2y\,, \\ z = 0\,. \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R}\,.$$

Ainsi $\boxed{E_{1/2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$.

$$X \in E_1(A) \iff \left(A - I_3\right)X = 0 \iff \begin{cases} -y + z = 0\,, \\ -y/2 = 0\,, \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0\,, \\ z = 0\,. \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Ainsi $\boxed{E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$.

$$X \in E_2(A) \iff \Big(A - 2I_3\Big)X = 0 \iff \begin{cases} -x - y + z = 0\,, \\ -3y/2 = 0\,, \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = x\,, \\ y = 0\,. \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Ainsi $\boxed{E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$.

Finalement on a $A = PDP^{-1}$ avec $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

La matrice D est diagonale de coefficients diagonaux tous non-nuls, elle est donc inversible et son inverse est la matrice diagonale constituée des inverses des coefficients diagonaux de D : $\boxed{D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}$.

3. Le calcul donne $\boxed{Q^2 = I_3}$ et $\boxed{QDQ = D^{-1}}$.
4. Remarquons d'abord que d'après la question précédente, $Q.Q = I_3$, c'est-à-dire que Q est inversible et $Q^{-1} = Q$.
   Par ailleurs $A = PDP^{-1}$ donc $A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$, or $D^{-1} = QDQ$ d'après la question précédente, donc
   $$A^{-1} = PQDQP^{-1} = PQDQ^{-1}P^{-1}\,.$$
   Enfin $D = P^{-1}AP$ donc
   $$A^{-1} = PQ(P^{-1}AP)Q^{-1}P^{-1} = PQP^{-1}APQ^{-1}P^{-1} = (PQP^{-1})A(PQP^{-1})^{-1}\,.$$
   Ainsi si l'on note $R = PQP^{-1}$, on a $A^{-1} = RAR^{-1}$, c'est-à-dire que $\boxed{A \text{ et } A^{-1} \text{ sont semblables}}$.

Partie B : Deuxième exemple

5. On a $f(1,0,0) = (1,0,0)$, $f(0,1,0) = (0,0,1)$ et $f(0,0,1) = (0,-1,2)$ donc $\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$.
   M est inversible si et seulement si $(L_2 \leftrightarrow L_3)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible, ce qui est le cas puisqu'il s'agit d'une matrice triangulaire de coefficients diagonaux tous non-nuls. Ainsi $\boxed{M \text{ est inversible}}$.
6. (a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On résout le système linéaire $(M - I_3)X = 0$:
   $$(M - I_3)X = 0 \iff \begin{cases} 0 = 0\,, \\ -y - z = 0\,, \\ y + z = 0\,. \end{cases} \iff z = -y \iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \end{pmatrix} \,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$
   Ce système possède au moins une solution non-nulle donc 1 est valeur propre de M . De plus $E_1(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Finalement puisque M représente f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\boxed{1 \text{ est valeur propre de } f}$ et $\boxed{E_1(f) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)}$. Les vecteurs u_1 et u_2 étant non-colinéaires, ils forment bien une base de $E_1(f)$.

(b) On cherche u_3 sous la forme $u_3 = (x, y, z)$.

$$f(u_3) - u_3 = u_2 \iff (M - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 0 = 0\,, \\ -y - z = 1\,, \\ y + z = -1\,. \end{cases}$$
$$\iff z = -y - 1\,.$$

Ainsi on peut par exemple choisir $x = 0$, $y = 0$, $z = -1$ et $\boxed{u_3 = (0, 0, -1) \text{ convient}}$.

(c) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $au_1 + bu_2 + cu_3 = (0, 0, 0)$. Alors

$$\begin{cases} a + 0.b + 0.c = 0\,, \\ 0.a + b + 0.c = 0\,, \\ 0.a - b - c = 0\,, \end{cases}$$

d'où $a = b = c = 0$. Ainsi la famille (u_1, u_2, u_3) est libre. De plus elle est constituée de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, $\boxed{\text{c'est donc une base de } \mathbb{R}^3}$.

7. (a) On a montré précédemment que (u_1, u_2) est une base de $E_1(f)$, donc $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = u_2$. Enfin on a choisi u_3 tel que $f(u_3) - u_3 = u_2$, c'est-à-dire $f(u_3) = u_2 + u_3$. Ainsi la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est $\boxed{M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

Déterminons maintenant M_2 : on a $f(u_1) = u_1$, $f(-u_2) = -f(u_2) = -u_2$ par linéarité de f et $f(u_3) = -(-u_2) + u_3$, donc $\boxed{M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

(b) M_1 et M_2 représentent le même endomorphisme f dans deux bases différentes, $\boxed{\text{elles sont donc semblables}}$ (en effet si on note T la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ alors $M_2 = T^{-1}M_1T$ d'après la formule de changement de base).
Le calcul donne $\boxed{M_1M_2 = I_3}$.

8. On vient de montrer que $M_1M_2 = I_3$, de plus M_1 est une matrice carrée, donc M_1 est inversible et $M_1^{-1} = M_2$.
M et M_2 représentent le même endomorphisme f donc M et M_2 sont semblables. Par ailleurs M^{-1} et M_1^{-1} représentent le même endomorphisme f^{-1} donc M^{-1} et M_1^{-1} sont semblables. Autrement dit M^{-1} et M_2 sont semblables puisque $M_1^{-1} = M_2$.
Finalement on a montré que M et M^{-1} sont toutes deux semblables à la même matrice M_2. Ainsi par transitivité $\boxed{M \text{ et } M^{-1} \text{ sont semblables}}$.

Partie C : Troisième exemple

9. T est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux tous non-nuls, donc $\boxed{T \text{ est inversible}}$.
Montrons par l'absurde que T n'est pas diagonalisable. Supposons T diagonalisable. T étant triangulaire, ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale, donc 1 est l'unique valeur propre de T. Ainsi puisque T est diagonalisable, il existe une matrice inversible P telle que $T = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$. Ainsi $T = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$, ce qui contredit la définition de T.
Ainsi $\boxed{T \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

10. (a) Le calcul donne $\boxed{N^3 = 0_3}$. Ainsi,

$$(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3 - N + N^2 + N - N^2 + N^3 = I_3 + N^3 = \boxed{I_3}\,.$$

(b) On vient de montrer que $(I_3+N)(I_3-N+N^2)=I_3$, de plus I_3+N est une matrice carrée, donc $I_3+N=T$ est inversible et $\boxed{T^{-1}=I_3-N+N^2}$.

11. (a) On vérifie par le calcul que $N^2\neq 0_3$, donc g^2 n'est pas l'endomorphisme nul, donc il existe $u\in\mathbb{R}^3$ tel que $\boxed{g^2(u)\neq 0}$. En revanche $N^3=0_3$ donc g^3 est l'endomorphisme nul, en particulier $\boxed{g^3(u)=0}$.

(b) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $ag^2(u)+bg(u)+cu=0$. Alors en appliquant g^2 et par linéarité de g^2 , on obtient $ag^4(u)+bg^3(u)+cg^2(u)=g^2(0)=0$, autrement dit puisque $g^3(u)=g^4(u)=0$: $cg^2(u)=0$. Or $g^2(u)\neq 0$ donc $c=0$.
L'équation initiale se récrit donc : $ag^2(u)+bg(u)=0$. En appliquant g qui est linéaire, on obtient alors : $ag^3(u)+bg^2(u)=0$, c'est-à-dire $bg^2(u)=0$, or $g^2(u)\neq 0$, donc $b=0$.
Finalement il reste $ag^2(u)=0$, d'où $a=0$. On a donc montré que $a=b=c=0$, et donc la famille $\mathcal{B}_3$ est libre. Il s'agit par ailleurs d'une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, ainsi $\boxed{\mathcal{B}_3 \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

(c) On a $g\big(g^2(u)\big)=g^3(u)=0$, $g\big(g(u)\big)=g^2(u)$, et $g(u)=g(u)$ donc la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_3$ est :

$$\boxed{M_3=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}.$$

(d) Le calcul donne $\boxed{N^2-N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=M_3}$.
Or M_3 et N sont semblables car elles représentent le même endomorphisme g dans des bases différentes. Ainsi $\boxed{N^2-N \text{ et } N \text{ sont semblables}}$.

12. D'après la question précédente il existe une matrice U inversible telle que $N=U^{-1}(N^2-N)U$. En remarquant que $I_3=U^{-1}U$, on peut alors écrire

$$T=I_3+N=U^{-1}U+U^{-1}(N^2-N)U=U^{-1}(I_3+N^2-N)U\,.$$

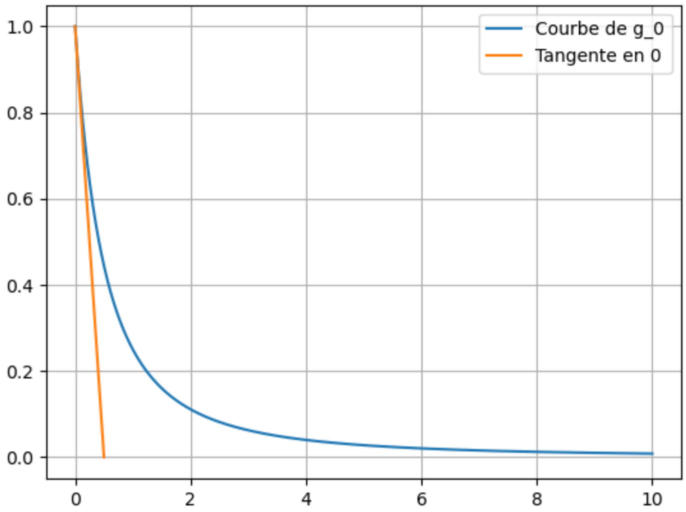
Or d'après la question 10b), $T^{-1}=I_3+N^2-N$, donc $T=U^{-1}T^{-1}U$, autrement dit $\boxed{T \text{ et } T^{-1} \text{ sont semblables}}$.

Exercice n°2 - Ecricome 2016

Partie A

1. (a) g_0 est C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ comme quotient de deux fonctions C^∞ avec un dénominateur jamais nul. Pour tout$x \geq 0$
$$g_0'(x) = \boxed{\frac{-2}{(1+x)^3}}$$
Donc g_0 est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} g_0(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(1+x)^2} = \boxed{0}$.
L'équation de la tangente en 0 est $y = g_0'(0)(x-0) + g_0(0)$ soit $\boxed{y = -2x+1.}$
Rq : En fait, il s'agit d'une demi-tangente, car g_0 n'est pas définie sur $]-\infty, 0[$.

(b) On obtient la représentation graphique suivante :



2. (a) Soit $n \geq 1$.

- La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$ donc, par produit, $x \mapsto (\ln(1+x))^n$.
- La fonction $x \mapsto (1+x)^2$ est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$ et ne s'y annule jamais.

Par quotient $\boxed{g_n \text{ est } C^\infty \text{ sur } [0, +\infty[}$.

$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad g_n'(x) = \frac{n\dfrac{1}{1+x}(\ln(1+x))^{n-1}(1+x)^2 - 2(1+x)(\ln(1+x))^n}{(1+x)^4}$$

$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad g_n'(x) = \frac{\overbrace{(1+x)(\ln(1+x))^{n-1}}^{\geq 0}(n - 2\ln(1+x))}{\underbrace{(1+x)^4}_{\geq 0}}$$

D'où $\boxed{g_n'(x) \geq 0 \Leftrightarrow n - 2\ln(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 2\ln(1+x) \Leftrightarrow 1 + x \leq e^{n/2} \Leftrightarrow x \leq e^{n/2} - 1.}$
Comme $n/2 > 0$, $e^{n/2} > 1$ et donc $e^{n/2} - 1 \in [0, +\infty[$.

On a donc :

x	0		$e^{n/2}-1$		$+\infty$
$g_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$g_n)$	0	$\nearrow$	M_n	$\searrow$	0

- $M_n = g_n(e^{n/2}-1)$
- $g_n(0) = \dfrac{(\ln(1))^n}{1^2} = 0$

(b) On pose $y = 1+x$. Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{(\ln y)^n}{y^2} = 0$ par croissances comparées. Donc par composition

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = 0}$$

(c) D'après le tableau de variations de g_n, g_n admet un maximum sur $[0,+\infty[$ en $e^{n/2}-1$ qui vaut :

$$M_n = g_n(e^{n/2}-1) = \frac{(\ln(e^{n/2}))^n}{(e^{n/2})^2} = \frac{(n/2)^n}{e^n} = \left(\frac{n}{2e}\right)^n.$$

$\ln(M_n) = n\ln\left(\dfrac{n}{2e}\right)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ donc : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = +\infty.}$

(d) Pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{g_n(x)}{1/x^{3/2}} \sim \dfrac{(\ln(1+x))^n}{x^{1/2}} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ (toujours par croissances comparées),

donc $\boxed{g_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right).}$

Partie B

3. Soit $A > 0$.

$$\int_0^A g_0(t)dt = \int_0^A \frac{1}{(1+t)^2}dt = \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^A = -\frac{1}{1+A} + 1 \underset{A\to+\infty}{\to} 1,$$

donc $\boxed{I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_0(t)dt \text{ converge et vaut } 1.}$

4. Soit $n \geq 1$.

• g_n et $t \mapsto \dfrac{1}{t^{3/2}}$ sont continues et positives sur $[1,+\infty[$.

• $g_n(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$ d'après 1d.

• Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}dt$ converge (Riemann et $3/2 > 1$), donc, d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} g_n(t)dt \text{ converge aussi.}}$

• Enfin, comme g_n est continue sur $[0,1]$, $\displaystyle\int_0^1 g_n(t)dt$ existe.

Par suite, $\boxed{I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)dt \text{ converge.}}$

5. Soit $A > 0$.
Posons $u(t) = (\ln(1+t))^{n+1}$, $u'(t) = \dfrac{(n+1)}{1+t}(\ln(1+t))^n$, $v'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2}$, $v(t) = -\dfrac{1}{1+t}$.
Comme u et v sont de classe C^1 sur $[0, A]$, on peut intégrer par parties et on a :
$$\begin{aligned}\int_0^A g_{n+1}(t)dt &= \left[-\frac{(\ln(1+t))^{n+1}}{1+t}\right]_0^A + \int_0^A \frac{(n+1)}{1+t}(\ln(1+t))^n \frac{1}{1+t}dt \\ &= -\frac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} + (n+1)\int_0^A g_n(t)dt.\end{aligned}$$
Or, $\lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_0^A g_{n+1}(t)dt = I_{n+1}$, $\lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_0^A g_n(t)dt = I_n$ (car I_n et I_{n+1} convergent)
et $\lim\limits_{A\to+\infty} -\dfrac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} = 0$ (par croissances comparées),
donc, en passant à la limite dans l'égalité précédente, on obtient bien :
$$\boxed{I_{n+1} = (n+1)I_n.}$$
6. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!$
   - **Initialisation :** On a $I_0 = 1$ et $0! = 1$, donc l'initialisation est vérifiée.
   - **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $I_n = n!$.

     Alors $I_{n+1} = (n+1)I_n \underset{hdr}{=} (n+1)n! = (n+1)!$
   - $\boxed{\textbf{Conclusion :}\text{ D'où, par récurrence, pour tout } n \in \mathbb{N},\ I_n = n!.}$

Partie C

7. • f_n est positive sur $\mathbb{R}$.
• f_n est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.
• $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} g_n(t)dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{n!}n! = 1$.
$\boxed{f_n \text{ peut donc bien être considérée comme une densité de probabilité.}}$
8. Soit $n \geq 1$.
• $t \mapsto tf_n(t)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont continues et positives sur $[1, +\infty[$.
• $\dfrac{1/t}{tf_n(t)} = \dfrac{n!(1+t)^2}{t^2(\ln(1+t))^n} \sim \dfrac{n!}{(\ln(1+t))^n} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, donc $\dfrac{1}{t} = \underset{t\to+\infty}{o}(tf_n(t))$.
• Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ diverge (Riemann de paramètre $1 \leq 1$), donc, d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} tf_n(t)dt$ diverge aussi.
$\boxed{\text{Donc } \displaystyle\int_0^{+\infty} tf_n(t)dt \text{ diverge, donc } X_n \text{ n'admet pas d'espérance.}}$
9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x < 0$, $F_n(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f_n(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = \boxed{0}$.
10. Pour tout $x \geq 0$, $F_0(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f_n(t)dt = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}dt = 1 - \frac{1}{1+x} = \boxed{\frac{x}{1+x}}$ (cf calculs précédents)
11. En reprenant les calculs faits lors de l'IPP (en remplaçant n par $k-1$ et A par x, on obtient :
$$\begin{aligned}F_k(x) &= \frac{1}{k!}\int_0^x g_k(t)dt = \frac{1}{k!}\left(-\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + k\int_0^x g_{k-1}(t)dt\right) \\ &= -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x g_{k-1}(t)dt = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + F_{k-1}(x),\end{aligned}$$

et on a donc bien :

$$\boxed{F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}.}$$

12. En sommant l'égalité précédente pour $k = 1..n$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x},$$

et donc, en télescopant à gauche de l'égalité :

$$F_n(x) - F_0(x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x},$$

et donc

$$\boxed{F_n(x) = F_0(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}.}$$

13. • Pour tout $x < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.
• Pour tout $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_n(x) &= 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}\sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!} \\ &\underset{n\to+\infty}{\to} 1 - \frac{1}{1+x}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!} \\ &\qquad \text{(série exponentielle de paramètre } \ln(1+x)\text{, donc convergente)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\to} \boxed{1 - \frac{1}{1+x}\exp(\ln(1+x)) = 1 - \frac{1+x}{1+x} = 0.} \end{aligned}$$

14. Posons $G : x \mapsto \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$.
G est nulle sur $\mathbb{R}$.
G ne varie pas de 0 à 1 en croissant donc G n'est pas une fonction de répartition.
$\boxed{\text{Donc } X_n \text{ ne converge pas en loi vers une variable } X.}$

15. (a) On a $X_n(\Omega) = \mathbb{R}^+$, donc $(1+X_n)(\Omega) = [1, +\infty[$, donc $Y_n = \ln(1+X_n)$ est bien définie et $\boxed{Y_n(\Omega) = \mathbb{R}^+.}$

(b) D'après le théorème de transfert, Y_n admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{X(\Omega)} \ln(1+x)f_n(x)dx$ converge absolument.
Or,

$$\begin{aligned} \int_{X(\Omega)} \ln(1+x)f_n(x)dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{n!}\frac{(\ln(1+x))^{n+1}}{(1+x)^2}dx \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} g_{n+1}(x)dx \\ &= \frac{1}{n!}I_{n+1} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \end{aligned}$$

Par suite, d'après le théorème de transfert, $Y_n = \ln(1+X_n)$ admet une espérance et $\boxed{E(Y_n) = n+1}$

(c) De même, d'après le théorème de transfert, Y_n^2 admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{X(\Omega)} (\ln(1+x))^2 f_n(x)dx$ converge absolument.
Or,

$$\begin{aligned}
\int_{X(\Omega)} (\ln(1+x))^2 f_n(x)dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{(\ln(1+x))^{n+2}}{(1+x)^2}dx \\
&= \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} g_{n+2}(x)dx \\
&= \frac{(n+2)!}{n!} = (n+2)(n+1)
\end{aligned}$$

Par suite, d'après le théorème de transfert, $Y_n^2 = (\ln(1+X_n))^2$ admet une espérance et $E(Y_n^2) = (n+2)(n+1)$, donc Y_n admet une variance et, d'après Huygens Koenig,
$V(Y_n) = E(Y_n^2) - (E(Y_n))^2 = (n+2)(n+1) - (n+1)^2 = n+1$
$\boxed{V(Y_n) = n+1}$

(d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$H_n(x) = P(Y_n \leq x) = P(\ln(1+X_n) \leq x) = P(1+X_n \leq e^x) = P(X_n \leq e^x - 1) = F_n(e^x - 1).$$

(e) H_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points comme composée de F_n (qui est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de point (fonction de répartition de X_n)) et de $x \mapsto e^x - 1$ (qui est C^1 sur $\mathbb{R}$).
Y_n est donc une variable à densité et une densité de Y_n est

$$h_n : x \mapsto e^x f_n(e^x - 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } e^x - 1 < 0 \\ e^x \dfrac{1}{n!}\dfrac{(\ln(1+e^x-1))^n}{(1+e^x-1)^2} & \text{si } e^x - 1 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^n e^{-x}}{n!} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(f) $h_0 : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ On reconnaît la densité d'une loi $\mathcal{E}(1)$, donc $Y_0 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.
D'après le théorème de transfert, Y_0 admet un moment d'ordre k (et donc $Y_0^k = (\ln(1+X_0))^k$ une espérance) si et seulement si $\displaystyle\int_{X_0(\Omega)} (\ln(1+x))^k f_0(x)dx$ converge absolument.
Or,

$$\begin{aligned}
\int_{X_0(\Omega)} (\ln(1+x))^k f_0(x)dx &= \int_0^{+\infty} (\ln(1+x))^k f_0(x)dx \qquad (\text{car } X_0(\Omega) = \mathbb{R}^+) \\
&= \int_0^{+\infty} (\ln(1+x))^k \frac{1}{(1+x)^2}dx \qquad (\text{définition de } f_0) \\
&= I_k
\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\int_{X_0(\Omega)} (\ln(1+x))^k f_0(x)dx$ converge absolument et, d'après le théorème de transfert, Y_0^k admet une espérance et $E(Y_0^k) = I_k = k!$. On peut conclure :

$\boxed{Y_0 \text{ admet un moment d'ordre } k\text{, qui vaut } k!}$

Exercice n°3 - ESCP 1996

Partie A

1. La loi de chaque T_i s'écrit sous forme de tableau :

a	-1	0	1
$\mathrm{P}(T_i = a)$	q	r	p

D'où

$$\mathbb{E}(T_i) = (-1)q + 0 \cdot r + 1 \cdot p = \boxed{p - q}, \qquad \mathbb{E}(T_i^2) = p + q.$$

La variance vaut alors, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathrm{Var}(T_i) = \mathbb{E}(T_i^2) - \mathbb{E}(T_i)^2 = \boxed{p + q - (p-q)^2}.$$

2. Le temps d'attente du premier succès (obtenir une boule blanche) dans une suite d'épreuves de Bernoulli de paramètre p suit une loi géométrique :

$$\boxed{X_1 \ \sim \ G(p).}$$

On rappelle les moments de la loi géométrique :

$$\mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{p}, \qquad \mathrm{Var}(X_1) = \frac{1-p}{p^2}.$$

3. Simulation de (X_1, X_2) (Python) ? :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X1_X2(p):
    x1 = 1
    while rd.rand() > p:          # on n'a pas encore de blanche
        x1 += 1
    x2 = x1 + 1                    # au moins un tirage de plus
    while rd.rand() > p:          # attendre la deuxième blanche
        x2 += 1
    return [x1, x2]
```

4. (a) Pour $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \geqslant i+1$, on écrit

$$\big[T_k = 1\big] = \mathbf{1}_{\{k\,\text{?ème tirage blanc}\}}.$$

Alors, par indépendance des tirages,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\big(X_1 = i \ \cap \ X_2 = j\big) &= \mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{i-1}[T_k \neq 1] \ \cap \ [T_i = 1] \ \cap \bigcap_{k=i+1}^{j-1} [T_k \neq 1] \ \cap \ [T_j = 1]\right) \\
&= \left(\prod_{k=1}^{i-1} \mathrm{P}(T_k \neq 1)\right) \mathrm{P}(T_i = 1) \left(\prod_{k=i+1}^{j-1} \mathrm{P}(T_k \neq 1)\right) \mathrm{P}(T_j = 1) \\
&= (1-p)^{\,i-1}\, p \, (1-p)^{\,j-i-1}\, p = \boxed{(1-p)^{\,j-2}\, p^2}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Si } j \leqslant i \text{ la probabilité vaut } 0}$ (la deuxième blanche ne peut pas arriver avant la première).

(b) En sommant sur tous les

$$i$$

possibles (formule des probabilités totales) on obtient, pour tout $j \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_2 = j) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}\big(X_1 = i \,\cap\, X_2 = j\big) \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} (1-p)^{\,j-2} p^2 = \boxed{(j-1)(1-p)^{\,j-2} p^2.}
\end{aligned}$$

(c) La série

$$\sum_{j \geqslant 2} j(j-1)(1-p)^{j-2}$$

est une série géométrique dérivée d'ordre 2. Comme $1 - p \in]-1, 1[$, elle converge. Ainsi

$$X_2$$

possède une espérance finie et, en utilisant la formule de la somme d'une série géométrique dérivée,

$$\boxed{\mathbb{E}(X_2) = \frac{2}{p}.}$$

5. On pose $U_2 = X_2 - X_1$ (nombre d'essais entre les deux premières blanches).

(a) Pour tout $j \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(U_2 = j) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}\big(X_1 = i \,\cap\, U_2 = j\big) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}\big(X_1 = i \,\cap\, X_2 = i + j\big) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{\,i+j-2} p^2 = \boxed{\frac{(1-p)^{\,j-1}}{p}.}
\end{aligned}$$

Mais $\dfrac{(1-p)^{\,j-1}}{p} = \mathrm{P}(X_1 = j)$, donc U_2 suit la même loi géométrique que X_1. On en déduit

$$\boxed{\mathbb{E}(U_2) = \frac{1}{p}}, \qquad \boxed{\mathrm{Var}(U_2) = \frac{1-p}{p^2}.}$$

(b) Vérifions l'indépendance de X_1 et U_2 ? :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\big(X_1 = i \,\cap\, U_2 = j\big) &= \mathrm{P}\big(X_1 = i \,\cap\, X_2 = i + j\big) \\
&= (1-p)^{\,i+j-2} p^2 \\
&= \big[(1-p)^{\,i-1} p\big] \big[(1-p)^{\,j-1} p\big] \\
&= \boxed{\mathrm{P}(X_1 = i)\ \mathrm{P}(U_2 = j).}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi } X_1 \text{ et } U_2 \text{ sont indépendantes.}}$

(c) Le programme suivant (Python) simule 10000 couples (X_1, U_2) puis calcule la covariance empirique ? :

```
import numpy as np, numpy.random as rd

def simulate(N,p):
    xs, us = [], []
```

```
    for _ in range(N):
        # première blanche
        i = 1
        while rd.rand() > p:
            i += 1
        # deuxième blanche
        j = i + 1
        while rd.rand() > p:
            j += 1
        xs.append(i)
        us.append(j-i)
    return np.cov(xs, us, bias=True)[0,1]

print(simulate(10000, 0.3))   # doit être très proche de 0
```

$\boxed{\text{Parce que les deux variables sont indépendantes, la covariance théorique est exactement 0.}}$

(d) Puisque $X_2 = X_1 + U_2$ et que X_1 et U_2 sont indépendantes,

$$\operatorname{Var}(X_2) = \operatorname{Var}(X_1) + \operatorname{Var}(U_2) = \boxed{2\,\frac{1-p}{p^2}.}$$

(e) En développant $\operatorname{Var}(U_2) = \operatorname{Var}(X_2 - X_1)$ on obtient

$$\operatorname{Var}(U_2) = \operatorname{Var}(X_2) + \operatorname{Var}(X_1) - 2\operatorname{Cov}(X_1, X_2),$$

d'où

$$\boxed{\operatorname{Cov}(X_1, X_2) = \frac{1-p}{p^2}.}$$

Cette covariance n'est pas nulle ? ; les variables X_1 et X_2 ne sont donc pas indépendantes.

Partie B

On note W le nombre de boules rouges obtenues avant l'apparition de la première boule blanche.

6. Fixons $i \geqslant 1$ et conditionnons par l'événement $[X_1 = i]$. Parmi les $i-1$ tirages précédant la première blanche, chaque tirage est soit rouge, soit noir. La probabilité conditionnelle d'obtenir une rouge à chaque essai vaut $\frac{r}{q+r}$. Ainsi, conditionnellement à $[X_1 = i]$, la variable W suit une loi binomiale

$$\boxed{W \mid [X_1 = i] \;\sim\; \mathcal{B}\!\left(i-1,\ \frac{r}{q+r}\right),}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\mathrm{P}\big(W = k \mid X_1 = i\big) = \binom{i-1}{k}\left(\frac{r}{q+r}\right)^{k}\left(\frac{q}{q+r}\right)^{i-1-k}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant i-1.}$$

7. En appliquant la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(W = k) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}\big(X_1 = i\big)\ \mathrm{P}\big(W = k \mid X_1 = i\big) \\
&= \sum_{i=k+1}^{\infty} (1-p)^{i-1} p \binom{i-1}{k}\left(\frac{r}{q+r}\right)^{k}\left(\frac{q}{q+r}\right)^{i-1-k} \\
&= \boxed{p\left(\frac{r}{q+r}\right)^{k} \sum_{i=k+1}^{\infty} \binom{i-1}{k}\left[(1-p)\tfrac{q}{q+r}\right]^{i-1-k}.}
\end{aligned}$$

8.
$$\binom{i}{k} = \frac{i!}{k!(i-k)!} = \frac{i \times (i-1)!}{k \times (k-1)!(i-1-(k-1))!} = \boxed{\frac{i}{k}\binom{i-1}{k-1}}$$

9. En permutant les deux sommes (justifié par convergence absolue) on obtient
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \, \mathrm{P}(W=k) \\ &= p\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{i-1}\sum_{k=0}^{i-1} k\binom{i-1}{k}\left(\frac{r}{q+r}\right)^{k}\left(\frac{q}{q+r}\right)^{i-1-k}.\end{aligned}$$

La somme intérieure est l'espérance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(i-1, \frac{r}{q+r})$, donc vaut $(i-1)\frac{r}{q+r}$. Ainsi
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W) &= p\frac{r}{q+r}\sum_{i=1}^{\infty}(i-1)(1-p)^{i-1} \\ &= p\frac{r}{q+r}\,\frac{1-p}{p^2} \qquad (\text{car } \sum_{i\geqslant 1}(i-1)a^{i-1} = \frac{1}{(1-a)^2}-1) \\ &= \frac{r}{p(q+r)}.\end{aligned}$$

En remarquant que
$$q+r = 1-p$$
, on retrouve la forme plus compacte
$$\boxed{\mathbb{E}(W) = \frac{r}{p}}.$$

Partie C

On note, pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n.$$

10. Le premier terme vaut $S_1 = T_1$. D'après le tableau de la question(1) on a

a	-1	0	1
$\mathrm{P}(T_1 = a)$	q	r	p

Ainsi
$$\mathbb{E}(S_1) = \mathbb{E}(T_1) = p-q, \qquad \mathrm{Var}(S_1) = \mathrm{Var}(T_1) = \boxed{p+q-(p-q)^2.}$$

11. Par linéarité de l'espérance,
$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(T_i) = \boxed{n\,(p-q).}$$
Les variables T_i étant mutuellement indépendantes,
$$\mathrm{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(T_i) = \boxed{n\big[p+q-(p-q)^2\big].}$$

12. Soit $t>0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$V_n = t^{S_n} = t^{\sum_{i=1}^{n} T_i}.$$

(a) **Loi et espérance de V_1.**
On a $V_1 = t^{T_1}$, et $T_1(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ donc la loi de V_1 se résume dans ce tableau :

a	$1/t$	1	t
$\mathrm{P}(V_1 = a)$	q	r	p

L'espérance de V_1 vaut alors

$$\mathbb{E}(V_1) = \frac{1}{t}\,q + 1 \cdot r + t \cdot p = \boxed{\frac{q + rt + t^2}{t}.}$$

(b) **Espérance de V_n.**
En utilisant l'indépendance des variables $(T_i)_{i \geqslant 1}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(V_n) &= \mathbb{E}\Big(t^{\sum T_i}\Big) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} t^{T_i}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(tT_i) \qquad \text{(lemme des coalitions / indépendance)} \\
&= \big(\mathbb{E}(V_1)\big)^n.
\end{aligned}$$

Or $\mathbb{E}(V_1) = \dfrac{q + rt + t^2}{t}$, d'où

$$\boxed{\mathbb{E}(V_n) = \left(\frac{q + rt + t^2}{t}\right)^n}.$$