Composite
—
E C G

Concours Blanc n°2

Option Économique

MATHÉMATIQUES

6 Janvier 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.
Les questions précédées de (*) sont destinées aux cubes.

Exercice n°1

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont dites semblables lorsque

$$\exists\, P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ inversible telle que : } B = P^{-1}AP$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier des exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes entre elles.

Partie A : Premier exemple

On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
   Justifier que A est inversible et diagonalisable.
2. Déterminer une matrice D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale où les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, et une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, telles que $A = PDP^{-1}$.
   Expliciter la matrice D^{-1}.
3. On note $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer Q^2 et QDQ.
4. En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Partie B : Deuxième exemple

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x, -z, y + 2z).$$

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère également les vecteurs u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^3$ définis par : $u_1 = (1, 0, 0)$ et $u_2 = (0, 1, -1)$.

5. Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible.
6. (a) Vérifier que 1 est valeur propre de f et que (u_1, u_2) est une base du sous-espace propre associé.
   (b) Déterminer un vecteur u_3 de $\mathbb{R}^3$ tel que : $f(u_3) - u_3 = u_2$.
   (c) Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On admet que $\mathcal{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est également une base de $\mathbb{R}^3$.

7. (a) Écrire la matrice M_1 de f dans la base $\mathcal{B}_1$ et la matrice M_2 de f dans la base $\mathcal{B}_2$.
   (b) Justifier que les matrices M_1 et M_2 sont semblables, et calculer $M_1 M_2$.
8. En déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.

Partie C : Troisième exemple

On considère la matrice T de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose : $N = T - I_3$.

9. Justifier que la matrice T est inversible. Est-elle diagonalisable ?
10. (a) Calculer N^3 et $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2)$.
    (b) En déduire une expression de T^{-1} en fonction de I_3, N et N^2.
11. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N.
    (a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g \circ g(u) \neq 0$ et $g \circ g \circ g(u) = 0$.
    (b) Montrer que la famille $\mathcal{B}_3 = (g \circ g(u), g(u), u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
    (c) Écrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_3$.
    (d) Calculer $N^2 - N$ et en déduire que les matrices N et $N^2 - N$ sont semblables.
12. Montrer que les matrices T et T^{-1} sont semblables.

Exercice n°2

Partie A : Étude d'une suite de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$g_n(x) = \frac{\big(\ln(1+x)\big)^n}{(1+x)^2}.$$

1. (a) Étudier les variations de la fonction g_0. Préciser la limite de g_0 en $+\infty$ ainsi que l'équation de la tangente en 0.
   (b) Donner l'allure de la courbe représentative de g_0.
2. (a) Pour $n > 1$, justifier que g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et montrer que, pour tout $x \geqslant 0$,

$$g_n'(x) > 0 \iff n > 2\ln(1+x).$$

   En déduire les variations de g_n lorsque $n > 1$.
   (b) Calculer soigneusement

$$\lim_{x \to +\infty} g_n(x).$$

   (c) Montrer que, pour $n > 1$, g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ qui vaut

$$M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n,$$

   et déterminer la limite de M_n lorsque $n \to +\infty$.
   (d) Déterminer $\alpha > 1$ tel que, pour tout $n > 1$,

$$g_n(x) = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \qquad (x \to +\infty).$$

Partie B : Étude d'une suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t)\, dt.$$

3. Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.
4. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, l'intégrale I_n est convergente.
5. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = (n+1)I_n.$$

6. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = n!\,.$$

Partie C : Une suite de variables aléatoires à densité

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{g_n(x)}{n!}, & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

7. Montrer que f_n peut être considérée comme une densité de probabilité.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire de densité f_n et F_n sa fonction de répartition.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. La variable X_n admet-elle une espérance ?
9. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x < 0$, $F_n(x)$.
10. Déterminer, pour $x \geqslant 0$, $F_0(x)$.
11. Soit $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!}\,\frac{\big(\ln(1+x)\big)^k}{1+x}.$$

12. En déduire une expression de $F_n(x)$ pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ faisant intervenir une somme (on ne la calculera pas explicitement).
13. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque $n \to +\infty$.
14. (*) La suite de variables aléatoires (X_n) converge-t-elle en loi ?
15. On introduit alors la variable $Y_n = \ln(1 + X_n)$.
    (a) Justifier que Y_n est bien définie, puis que $Y_n(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.
    (b) Justifier que Y_n admet une espérance et la calculer.
    (c) Justifier que Y_n admet une variance et la calculer.
    (d) On note H_n la fonction de répartition de Y_n. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$H_n(x) = F_n\big(e^x - 1\big).$$

    (e) En déduire que Y_n est une variable à densité et préciser une densité de Y_n.
    (f) Reconnaître la loi de Y_0. En déduire de la partie 2 que Y_0 admet, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, un moment d ?ordre k et préciser sa valeur.

Exercice n°3

Une urne contient des boules blanches (proportion p), des boules noires (proportion q) et des boules rouges (proportion r), avec $p+q+r=1$ et $p,q,r \in]0,1[$. Les tirages sont faits avec remise ; pour $i \in \mathbb{N}^*$ on note

$$T_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{-ème boule tirée est blanche,} \\ -1 & \text{si elle est noire,} \\ 0 & \text{si elle est rouge.} \end{cases}$$

Les variables $(T_i)_{i\geqslant 1}$ sont donc mutuellement indépendantes.

Partie A

On note X_1 le rang du premier tirage donnant une boule blanche et X_2 le rang du tirage donnant la deuxième boule blanche.

1. Expliciter, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la loi de T_i. Calculer son espérance et sa variance.
2. Reconnaître la loi de X_1. Rappeler son espérance et sa variance.
3. Compléter la fonction Python suivante afin de simuler les variables X_1 et X_2. Pourquoi la fonction ne prend-elle en argument que la proportion p des boules blanches ?

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X1_X2(p):
    x1 = ...
    while ...:
        x1 = ...
    x2 = ...
    while ...:
        x2 = ...
    return [x1, x2]
```

4. (a) Expliciter la loi conjointe du couple (X_1, X_2).
   (b) En déduire la loi marginale de X_2.
   (c) Montrer que X_2 admet une espérance et que $\mathbb{E}(X_2) = \dfrac{2}{p}$.
5. On note $U_2 = X_2 - X_1$.
   (a) Pour $j \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P(U_2 = j)$. En déduire que X_1 et U_2 suivent la même loi, puis que U_2 admet une variance (préciser sa valeur).
   (b) Montrer que U_2 est indépendante de X_1.
   (c) Exprimer X_2 en fonction de U_2 et X_1, puis en déduire que X_2 admet une variance (préciser).
   (d) Que vaut $\mathrm{cov}(X_1, X_2)$? Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
   (e) On ajoute le fragment de code suivant après la fonction précédente :

```
p = 1/4
L = []; M = []
for k in range(10000):
    X1, X2 = simul_X1_X2(p)
    L.append(X1)
    M.append(X2)
U = [M[k] - L[k] for k in range(10000)]
print(np.mean([L[k]*U[k] for k in range(10000)]) -
        np.mean(L)*np.mean(U))
```

   Que peut-on prévoir quant à l'affichage après exécution ?

Partie B

On note W le nombre de boules rouges obtenues avant la première boule blanche.

6. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi conditionnelle de W sachant $[X_1 = i]$.
7. En déduire que la loi de W est donnée par

$$P(W = k) = p\left(\frac{r}{q+r}\right)^k + \sum_{i=k+1}^{\infty} \binom{i-1}{k} \left(\frac{q}{q+r}\right)^{i-1-k} (1-p)^{i-1}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

8. Vérifier, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\binom{i}{k} = \frac{i}{k}\binom{i-1}{k-1}.$$

9. En admettant qu'on peut permuter les sommes

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=k+1}^{\infty} (\cdots) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{i-1} (\cdots),$$

   et que W possède une espérance, montrer que

$$\mathbb{E}(W) = \frac{r}{p}.$$

Partie C

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = T_1 + \cdots + T_n$.

10. Quelle est la loi de S_1 ? Préciser son espérance et sa variance.
11. Expliciter l'espérance et la variance de S_n.
12. Soit $t > 0$ et $V_n = t^{S_n}$.
    (a) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de V_1.
    (b) En déduire l'expression de $\mathbb{E}(V_n)$.