Équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' = y + 1$
2. $y' = 3y + \mathrm{e}^{3x}$
3. $y' = 2y + \mathrm{e}^{2x}(1 + x)$
4. $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$
5. $y' = -y + x\mathrm{e}^{x}$
6. $y' = 2y + 2x^2 - 1$

Exercice 2

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $\begin{cases} y' + 2y = 3 \\ y(0) = 10 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y' - y = t^2 + 1 \\ y(0) = -3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y' + y = t\mathrm{e}^{t} \\ y(1) = -1 \end{cases}$

EDL d'ordre deux à coefficients constants

Exercice 3

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = -3 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y'' - 2y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

Exercice 4

Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = 1 + t$
2. $y'' - 3y' + 2y = te^{t}$
3. $y'' - 4y' + 4y = (-1 + t)e^{-t}$
4. $y'' - 4y' + 4y = te^{2t}$
5. $y'' - 2y = e^{t}$
6. $y'' - 2y = 1 - 2t + 3t^2$

Exercice 5

Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' - y' = 0$ de deux manières différentes :

(1) En appliquant le théorème du cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2.

(2) En faisant un changement de fonction inconnue pour se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Systèmes différentiels - Cas diagonalisable

Exercice 6

On veut résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' &= x - 2y \\ y' &= -2x + y \end{cases} \qquad x(0) = 1 = y(0)$$

1. Écrire le système sous la forme $X' = AX$
2. Trouver des matrices D diagonale et P inversible telles
$$A = PDP^{-1}$$
3. En posant $Y = P^{-1}X$ et **sans calculer** P^{-1} Montrer que Y vérifie l'équation
$$Y' = DY$$
4. Résoudre cette équation.
5. En déduire les solutions de l'équation initiale.
6. Trouver la solution du problème de Cauchy.

Exercice 7

Résoudre

$$(S1) \begin{cases} x' &= -\dfrac{x}{2} - y \\ \\ y' &= -\dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{2} \end{cases} \qquad (S2) \begin{cases} x' &= -2y \\ \\ y' &= -\dfrac{x}{2} \end{cases}$$

Exercice 8 — Valeurs propres données

On cherche à résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$(S1). \begin{cases} x' &= x + 2y - z \\ y' &= 2x + 4y - 2z \\ z' &= -x - 2y + z \end{cases} \qquad (S2). \begin{cases} x' &= y + z \\ y' &= -x + 2y + z \\ z' &= x + z \end{cases}$$

1. Écrire le système $(S1)$ sous la forme $X' = AX$
2. On donne les valeurs propres de A : 0 et 6. Diagonaliser la matrice puis résoudre le système
3. Écrire $(S2)$ sous la forme $X' = BX$
4. Les valeurs propres de B sont 0,1 et 2. Résoudre ce système

Exercice 9 — polynôme annulateur donné

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on cherche à résoudre le système $X' = AX$

1. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, écrire $X' = AX$ sous la forme d'un système de trois équations différentielle
2. Calculer A^3,en endéduire une polynome annulateur de A
3. Diagonaliser A
4. Résoudre le système différentiel.

Systèmes différentiels - Autres cas

Exercice 10

On étudie $(S_1) : \begin{cases} x' &= -2x + y \\ y' &= -4x + 2y \end{cases}.$

1. Écrire ce système sous forme matricielle $X' = AX$.
2. Calculer A^2. En déduire les valeurs propres potentielles de A. Est elle diagonalisable ?
3. On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Calculer AU. On nomme $V = AU$, calculer AV.
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et sans calcul montrer que
$$A = PNP^{-1} \text{ avec } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
5. On note $Y = P^{-1}X$, montrer que $Y' = NY$ $\qquad (S2)$
6. On pose $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$. Montrer $(S2)$ peut s'écrire $\begin{cases} u'(t) &= 0 \\ v'(t) &= u(t) \end{cases}.$
7. Résoudre ce dernier système et montrer qu'il existe deux constantes telles que :
$$u(t) = K_1 \qquad v(t) = K_1 t + K_2$$
8. Résoudre le système initial.

Exercice 11 — Cas non diagonalisable

On cherche à résoudre le système

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) + y(t) \\ y'(t) &= \qquad y(t) \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = 1$$

1. Écrire le système sous forme matricielle $X' = AX$
2. Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable
3. En utilisant la deuxième ligne du système trouver la forme de y (on utilisera la condition initiale).
4. En déduire que x vérifie l'équation
$$x'(t) = x(t) + \mathrm{e}^t$$
5. Résoudre cette équation (on pourra chercher une solution particulière sous la forme $t \mapsto (at + b)\mathrm{e}^t$.

Exercice 12 — Second membre

On cherche à résoudre
$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) - 2y(t) + \mathrm{e}^{3t} \\ y'(t) &= -2x(t) + y(t) + \mathrm{e}^{3t} \end{cases}$$

On pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} \\ \mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}$$

1. Trouver une matrice A telle que le système s'écrive
$$X' = AX + B$$
2. Résoudre le système $X' = AX$
3. Montrer que $X_0(t) = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} \\ \mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}$ est solution particulière de l'équation de départ
4. Résoudre l'équation.

Ordre supérieur

Exercice 13

On étudie l'équation : $y'' = 4y$.

1. Résoudre cette équation avec la méthode vue l'année dernière
2. On pose $Y(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ Trouver une matrice A telle que $Y' = AY$
3. Résoudre cette dernière équation avec la méthode vue cette année

Exercice 14 — Ordre 3

On cherche à résoudre : $y''' = 6y'' - 11y' + 6y$.

1. Soit $Y(t) = \begin{pmatrix} y'' \\ y' \\ y \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que Y vérifie le système : $Y' = AY$.
2. Montrer que $(A - I_3)(A - 2I_3)(A - 3I) = 0$
3. En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de A
4. Écrire A sous la forme $A = PDP^{-1}$
5. En posant $Z = P^{-1}Y$, montrer que Z vérifie $Z' = DZ$ résoudre cette équation puis donner une expression de Y
6. Donner une expression de $y(t)$

Exercice 15

On veut résoudre le système $\begin{cases} x''(t) & = x'(t) + y'(t) - y(t) \\ y''(t) & = x'(t) + y'(t) - x(t) \end{cases}$. On pose $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice A telle que $X' = AX$
2. Les valeurs propres de A sont -1 et 1. Résoudre l'équation

Hors Programme :Equations différentielles à coefficients non constants

Exercice 16

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}y = \dfrac{1+3x^2}{1+x^2}$
2. $y' - \ln(x)y = x^x$

Exercice 17

Résoudre, sur $]0,1[$, l'équation différentielle : $\left(1-x^2\right)y' + xy = \dfrac{1}{x} + x\ln(x) - x$

Exercice 18

Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \displaystyle\int_0^x f(t)(2x-3t)dt = \frac{x^2}{2}$.

Exercice 19 — Lemme de Gronwall

Soient $c \in [0, +\infty[$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive. Soit $u : I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \Big[a, b\Big[, \quad |u(x)| \leqslant c + \int_a^x |u(t)|g(t)dt$$

1. On pose $v : x \mapsto c + \displaystyle\int_a^x |u(t)|g(t)dt$ et $w : x \mapsto v(x)\exp\left(-\displaystyle\int_a^x g(t)dt\right)$. Montrer que w est décroissante sur I.
2. En déduire : $\forall x \in [a,b], |u(x)| \leqslant c\exp\left(\displaystyle\int_a^x g(t)dt\right)$.

Hors Programme : Équations fonctionnelles

Exercice 20

Soit f une fonction réelle à valeurs réelles deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

1. On commence par étudier la fonction f.

a) Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.
b) Montrer que si $f(0) = 0$, la fonction f est la fonction identiquement nulle.
c) Montrer que f est paire et : $f'(0) = 0$.

2. Démontrer, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $f''(x)f(y)=f(x)f''(y)$
3. En déduire que f est soit nulle, soit solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
4. Déterminer l'ensemble des fonctions f satisfaisant l'équation fonctionnelle.

Exercice 21

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(xy)=xf(y)+yf(x)$$

Dans toute la suite, f désigne une fonction de $\mathcal{E}$.

1. a) Déterminer les valeurs de $f(0), f(1)$ et $f(-1)$.

b) Démontrer que la fonction f est impaire.

2. On suppose que la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

a) Montrer que f est solution, sur l'intervalle $]0,+\infty[$, de l'équation différentielle :

$$xf'(x)-f(x)=kx$$

où k est une constante réelle dépendant de f que l'on précisera.
b) Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle précédente.
c) En déduire, en fonction de la constante k, la valeur de $f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
d) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

3. On note F la primitive de f qui s'annule en 0 .

a) Montrer que, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$F(xy)=x^2F(y)+\frac{xy^2}{2}f(x)$$

b) En déduire que la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$.

Hors Programme : Équations différentielles non linéaires

Exercice 22

Soit $(a,b)\in]0,+\infty[^2$. On considère l'équation différentielle logistique (non linéaire)

$$y'=ay-aby^2$$

(1) Déterminer les équilibres de l'équation logistique.

(2) Soit f une solution de (E) sur $[0,+\infty[$ qui ne s'annule pas (on admet qu'une telle solution existe).

(a) On pose $z=\dfrac{1}{f}$. Montrer que z satisfait une équation différentielle linéaire puis montrer que, pour tout $t\geqslant 0, z(t)=b+(z(0)-b)e^{-at}$.

(b) En déduire que, pour tout $t\geqslant 0, f(t)=\dfrac{f(0)}{bf(0)+(1-bf(0))e^{-at}}$.

(3) Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$. Que remarque-t-on ?

Exercice 23

On considère l'équation différentielle : $xy'-xe^{-\frac{y}{x}}-y=0$.
Résoudre cette équation différentielle à l'aide du changement de variable $z:x\mapsto \dfrac{1}{x}y(x)$.

Hors Programme : Exponentielle de matrice

Exercice 24

On note N une matrice carrée nilpotente, c'est à dire telle qu'il existe un entier naturel n $N^n=0$ On note

$$exp(N)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}N^k$$

et on cherche à résoudre

$$X'=NX\qquad X(0)=X_0$$

1. Montrer $exp(N)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}N^k$
2. On note $f:t\mapsto \exp(tN)$ calculer $f'(t)$
3. Résoudre l'équation.
4. Montrer que

$$\forall t\in\mathbb{R}\forall t'\in\mathbb{R}\qquad \exp((t+t')N)=\exp(tN)\exp(t'N)$$

5. On note N' une autre matrice nilpotente montrer que $\exp(N+N')=\exp(N)\exp(N')$
6. On note $A=PDP^{-1}$ une matrice diagonalisable avec $D=\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_r\end{pmatrix}$ deviner la valeur de $\exp(A)$