Chapitre n°11

# Fonctions de deux variables

## I. Généralités

**Définition 1.1**

On appelle fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ toute application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

qui à un couple $(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ associe un réel noté $f(x,y)$. On dit alors que $f$ est une fonction de deux variables (réelles).

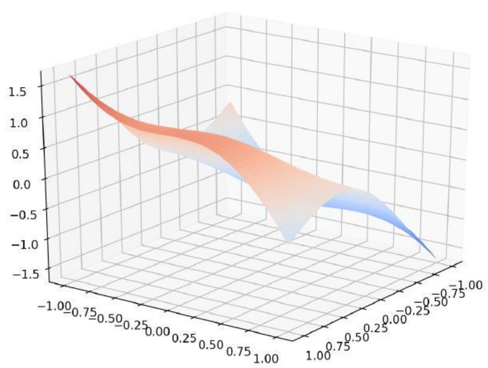
Dans un premier temps, on définira les fonctions sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. Après avoir introduit la notion d'ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans une section suivante, on pourra avoir des fonctions dont les domaines de définition sont plus restreints.

**Exemple :**

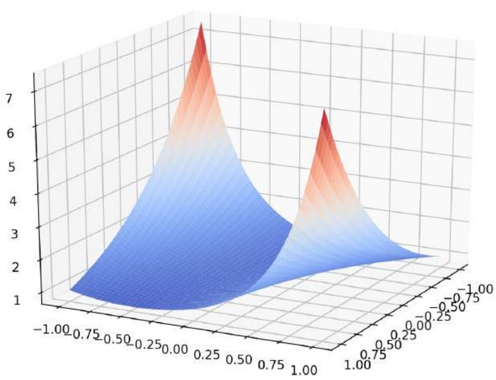
Les fonctions suivantes sont des fonctions de deux variables définies sur $\mathbb{R}^2$.

$$f : (x,y) \mapsto \frac{2x - 3x^2y^3}{x^2+y^2+1}; \quad g : (x,y) \mapsto e^{y^2+xy}; \qquad p : (x,y) \mapsto x$$

Courbe de $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \dfrac{2x - 3x^2y^3}{x^2+y^2+1}$




Courbe de $g : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{y^2+xy}$




On se pose alors, comme pour les fonctions d'une variable réelle, des questions de régularité (continuité, dérivabilité). Mais il faut pour cela donner un sens à la notion de limite ce qui nécessite l'introduction préalable de de la notion de distance sur $\mathbb{R}^2$.

**Définition 1.2**

Soient $A\,(x_A, y_A)$ et $B\,(x_B, y_B)$ deux points de $\mathbb{R}^2$. On appelle distance de $A$ à $B$ le réel, noté $d(A,B)$, égal à :

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Dans un repère orthonormal, le réel $d(A,B)$ correspond à la longueur du segment $[AB]$ et la formule précédente découle..... du théorème de Pythagore.

**Définition 1.3**

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$.

- On dit que $f$ est continue en $(x_0, y_0)$ si

$\forall \epsilon > 0, \exists r > 0$ tels que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad d\left((x,y),(x_0,y_0)\right) \leq r \Longrightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq \epsilon$.

- On dit que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ ssi $f$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Parmi les premiers exemples de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$, on trouve les fonctions polynomiales et en particulier les fonctions coordonnées.

**Proposition 1.4**

Les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}^2$ :

- Les fonctions polynomiales $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de la forme

$$f : (x,y) \mapsto x^i y^j, \quad \text{avec } (i,j) \in \mathbb{N}^2$$

- Les fonctions coordonnées de la forme

$$(x,y) \mapsto x \quad \text{et} \quad (x,y) \mapsto y$$

**Théorème 1.5**

- La somme, le produit, le quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- La composée d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $I \subset \mathbb{R}$ et d'une fonction continue sur $I$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 1**

1. Montrer que la fonction $f : (x,y) \to \dfrac{2x - 3x^2y^3}{x^2 + y^2 + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la fonction $g : (x,y) \to ye^{-x^2-y}$. est continue sur $\mathbb{R}^2$.

# II. Représentation graphique des fonctions de deux variables

## II. 1 Courbe, surface

**Définition 2.1**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. La courbe de $f$ est une surface tracée dans l'espace correspondant à l'ensemble de points

$$\mathcal{C}_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y)\right\}$$

## Remarques :

- **R1 –** On peut voir les coordonnées $x$ et $y$ d'un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ comme la latitude et la longitude et $z = f(x, y)$ comme l'altitude de ce point. Bien que ce soit une surface en 3 dimensions, on arrive à la représenter dans le plan en jouant sur la perspective et en utilisant des couleurs (les variations de couleurs représentent les variations d'altitude).
- **R2 –** Les commandes Python permettant la représentation en trois dimensions d'une courbe ne sont pas exigibles. Néanmoins, on pourrait demander d'interpréter la présence de points remarquables par observations de la figure.

### II. 2 Lignes de niveaux

**Définition 2.2**

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle ligne de niveau $\lambda$ de $f$ l'ensemble

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = \lambda\right\}$$

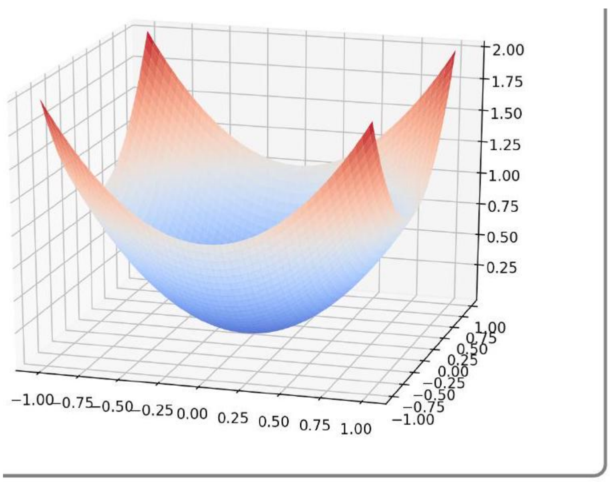
## Remarque :

Si $f$ est la fonction qui à la longitude et la latitude associe l'altitude, alors les lignes de niveau représentent les points qui sont à la même altitude : si on se promène sur une ligne de niveau, on ne monte pas et on ne descend pas : on reste au même niveau.

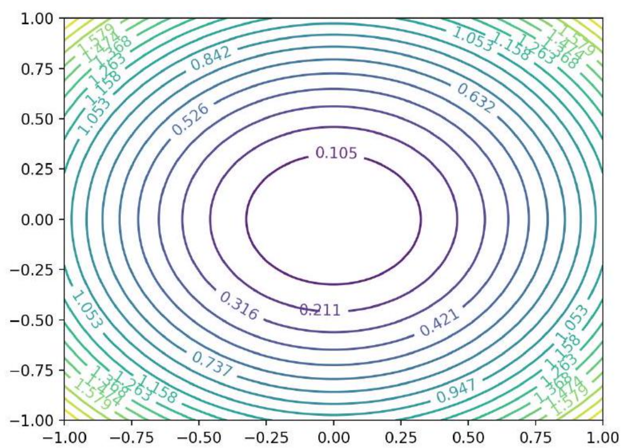
**Avec Python**

Pour tracer les lignes de niveaux avec Python, il faut commencer par préciser la liste L des niveaux qu'on veut représenter puis on utiliser la commande `plt. contour (X,Y, Z, L)`

Courbe de $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$




Lignes de niveaux de $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$




On voit par exemple ci-dessus qu'autour de $(0, 0)$, les lignes de niveaux ont tendance à se resserrer au fur et à mesure que le niveau diminue, cela traduit qu'il y a un minimum local en $(0; 0)$, ce qui est cohérent avec l'autre figure.

# III. Calcul différentiel

On considère dans cette partie une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

## III. 1 Dérivées partielles d'ordre 1

**Définition 3.1**

- On dit que $f$ admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à $x$ au point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si la fonction réelle $f_x : t \to f(t, y_0)$ est dérivable en $x_0$.

On note alors cette dérivée partielle en $(x_0, y_0)$ : $\partial_1(f)(x_0, y_0)$.

- On dit que $f$ admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à $y$ au point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si la fonction réelle $f_y : t \to f(x_0, t)$ est dérivable en $y_0$. On note alors cette dérivée partielle en $(x_0, y_0)$ : $\partial_2(f)(x_0, y_0)$.

**Définition 3.2**

- Si $f$ admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à $x$ en tout point de $\mathbb{R}^2$, alors la fonction de deux variables $\partial_1(f)(x, y)$ s'appelle la fonction dérivée partielle d'ordre 1 de $f$ par rapport à $x$.
- Si $f$ admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à $y$ en tout point de $\mathbb{R}^2$, alors la fonction $\partial_2(f)(x, y)$ s'appelle la fonction dérivée partielle d'ordre 1 de $f$ par rapport à $y$.

### Remarques :

**R1** – La notion de dérivée partielle correspond à la notion de dérivation par rapport à une des variables en fixant les autres, c'est-à-dire en les considérant comme des constantes. Les règles de dérivation découlent alors directement des règles de dérivation des fonctions à une variable.

**R2** – On pourra parfois rencontrer (dans des vieux sujets) les notations $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (à ne pas utiliser).

**Définition 3.3**

On appelle gradient de $f$ au point $(x, y)$ le vecteur colonne de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ suivant :

$$\nabla(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_1(f)(x, y) \\ \partial_2(f)(x, y) \end{pmatrix}$$

**Exercice 2**

Exercice 2. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = ye^{-x^2-y}$.

1. Montrer que $f$ admet des dérivées partielles d'ordre 1 et les calculer.
2. Déterminer le gradient de la fonction $f$ au point $(1, 2)$.

## III. 2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

**Définition 3.4**

Si les fonctions $\partial_1(f)$ et $\partial_2(f)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$, on dit que la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Proposition 3.5**

Toute fonction polynomiale est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Théorème 3.6**

- La somme, le produit, le quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
- La composée d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $I \subset \mathbb{R}$ et d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 3**

Montrer que la fonction $f$ de l'Exercice 2 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

### III. 3 Développement limité d'ordre 1

Comme pour des fonctions d'une variable réelle, on peut vouloir donner des approximations polynomiales locales des fonctions de deux variables, via la notion de développement limité. Le résultat suivant fait office de définition et de théorème.

**Proposition 3.7**

Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Alors, $f$ admet un développement limité d'ordre 1 en tout point $(x_0, y_0)$ de $\mathbb{R}^2$. Ce développement limité est unique. Plus précisément, il existe une fonction de deux variables $\varepsilon$ (qui dépend du point $(x_0, y_0)$ ) continue en $(0,0)$, vérifiant $\varepsilon(0,0) = 0$ et telle que, pour tout $(h,k)$ "proche" de $(0,0)$,

$$\begin{aligned} f\left(x_0+h, y_0+k\right) &= f\left(x_0, y_0\right) + {}^t\nabla(f)\left(x_0, y_0\right) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \left(\sqrt{h^2+k^2}\right) \varepsilon(h,k) \\ &= f\left(x_0, y_0\right) + {}^t\nabla(f)\left(x_0, y_0\right) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o\left(d\left((h,k), 0_{\mathbb{R}^2}\right)\right). \end{aligned}$$

**Exemple :**

Soit $f(x,y) \mapsto ye^x + e^{2y} + x^2$. Il est clair que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On peut alors écrire le développement limité de $f$ à l'ordre 1 en $(0,0)$. Pour $(x,y)$ proche de $(0,0)$,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + {}^t\nabla(f)(0,0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \varepsilon(x,y) \\ &= 1 + \begin{pmatrix} 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \varepsilon(x,y) \\ &= 1 + 3y + \left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \varepsilon(x,y) \end{aligned}$$

## III. 4 Dérivées partielles d'ordre 2

**Définition 3.8**

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ et admettant des dérivées partielles d'ordre 1 . Si les fonctions dérivées partielles

$$(x,y) \mapsto \partial_1(f)(x,y) \quad \text{et} \quad (x,y) \mapsto \partial_2(f)(x,y)$$

admettent également des dérivées partielles d'ordre 1 , on dit que $f$ admet des dérivées partielles d'ordre 2. On note alors

$$\begin{array}{ll} \partial^2_{1,1}(f) = \partial_1\left(\partial_1(f)\right) & \partial^2_{2,2}(f) = \partial_2\left(\partial_2(f)\right) \\ \partial^2_{1,2}(f) = \partial_1\left(\partial_2(f)\right) & \partial^2_{2,1}(f) = \partial_2\left(\partial_1(f)\right) \end{array}$$

**Remarque :**

Comme précédemment, on rencontrera parfois les notations

$$\partial^2_{1,1}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \partial^2_{2,2}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \partial^2_{1,2}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \partial^2_{2,1}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

**Définition 3.9**

Si la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et si ses dérivées partielles $\partial_1(f)$ et $\partial_2(f)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, alors on dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 4**

Naturellement, toute fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Proposition 3.10**

Toute fonction polynomiale est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Théorème 3.11**

- La somme, le produit, le quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
- La composée d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $I \subset \mathbb{R}$ et d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

En toute généralité, l'ordre dans lequel on effectue les dérivées partielles est important. Le théorème suivant, central dans cette théorie, affirme qu'en cas de fonction régulière (de classe $\mathcal{C}^2$ ), c'est la même chose.

**Théorème 3.12 — Théorème de Schwarz**

Si $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ alors

$$\partial^2_{1,2}(f) = \partial^2_{2,1}(f)$$

**Définition 3.13**

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. La matrice hessienne de $f$ au point $(x,y)$ est la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivante

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(f)(x,y) & \partial^2_{1,2}(f)(x,y) \\ \partial^2_{2,1}(f)(x,y) & \partial^2_{2,2}(f)(x,y) \end{pmatrix}$$

**Remarque :**

Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ alors, $\partial^2_{1,2}(f) = \partial^2_{2,1}(f)$ d'après le théorème de Schwarz donc la matrice hessienne de $f$ est une matrice symétrique et donc diagonalisable.

**Exercice 5**

Déterminer la matrice hessienne de la fonction $f$ de l'Exercice 2 au point $(1,2)$.

# IV. Un peu de topologie de $\mathbb{R}^2$

Afin de parler de la notion d'extremum, il est nécessaire de préciser quelques notions de topologie sur les parties de $\mathbb{R}^2$ sur lesquelles on va rechercher ces extrema.

## IV. 1 Parties ouvertes, parties fermées, parties bornées

**Définition 4.1**

Soit $r$ un réel strictement positif et $A\,(x_A, y_A)$ un point de $\mathbb{R}^2$.

- On appelle boule ouverte de centre $A$ et de rayon $r$ l'ensemble $\mathcal{B}_o(A,r)$ défini par

$$\mathcal{B}_o(A,r) = \left\{M \in \mathbb{R}^2 : d(M,A) < r\right\}$$

- On appelle boule fermée de centre $A$ et de rayon $r$ l'ensemble $\mathcal{B}_f(A,r)$ défini par :

$$\mathcal{B}_f(A,r) = \left\{M \in \mathbb{R}^2 : d(M,A) \leq r\right\}$$

**Définition 4.2**

Soit $U$ une partie non vide de $\mathbb{R}^2$.

- Une partie $U$ de $\mathbb{R}^2$ est dite ouverte si et seulement si pour tout point $M \in U$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_o(M,r) \subset U$, soit si e seulement si, pour tout $M \in U$ il existe une boule ouverte de centre $A$ incluse dans $U$.
- Une partie $F$ de $\mathbb{R}^2$ est dite fermée si et seulement si son complémentaire $\bar{F}$ est une partie ouverte.

**Remarque :**

L'énoncé précisera toujours la nature de la partie $U$ étudiée (ouverte ou fermée). Voici quelques exemples.

- Toute boule ouverte de $\mathbb{R}^2$, tout ensemble de la forme $]a,b[\times]c,d[$ sont de parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$.
- Toute boule fermée de $\mathbb{R}^2$, tout ensemble de la forme $[a,b] \times [c,d]$ sont de parties fermées de $\mathbb{R}^2$.

**Définition 4.3**

Une partie $\Omega$ de $\mathbb{R}^2$ est dite bornée si et seulement si il existe $R>0$ tel que pour tout $M \in \Omega$, $d(M,O) \leq R$ (où $O$ est le point $(0,0)$ ), c'est-à-dire que $\Omega$ est inclus dans la boule fermée de centre $O$ et de rayon $R$.

**Exemple :**

- Toute boule ouverte de $\mathbb{R}^2$ (resp. fermées) est une partie ouverte (resp. fermées) et bornée de $R^2$.
- Tout ensemble de la forme $]a,b[\times]c,d[$ sont de parties bornées de $\mathbb{R}^2$.
- Tout ensemble de la forme $[a,b]\times[c,d]$ sont de parties bornées de $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 6**

1. Représenter graphiquement les domaines ouverts suivants

$$U_1 = ]\,0;1[\times]0;1\,[,\quad U_2 = ]\,0;1\,[\times\mathbb{R},\quad U_3=\mathbb{R}\times]\,0;+\infty[$$

2. Représenter graphiquement le domaine ouvert

$$U_4=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0 \text{ et } x<y\right\}$$

et le domaine fermé

$$F=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2 : x+y\leq 1\right\}.$$

# V. Recherche d'extrema

## V. 1 Extremum local

**Définition 5.1**

Soit $f$ une fonction définie sur un ouvert $U$ et soit $(x_0,y_0)$ un point de $U$.

- On dit que $f$ admet un minimum local en $(x_0,y_0)$ s'il existe $r>0$ tel que

$$\forall (x,y)\in\mathcal{B}\left((x_0,y_0),r\right)\cap U,\quad f(x,y)\geq f\left(x_0,y_0\right)$$

- On dit que $f$ admet un maximum local en $(x_0,y_0)$ s'il existe $r>0$ tel que

$$\forall (x,y)\in\mathcal{B}\left((x_0,y_0),r\right)\cap U,\quad f(x,y)\leq f\left(x_0,y_0\right)$$

- On dit que $f$ admet un extremum local en $(x_0,y_0)$ lorsque $f$ admet soit un minimum soit un maximum local en ce point.

## V. 2 Point critique

**Définition 5.2**

Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U$. On dit que $(x_0,y_0)\in U$ est un point critique de $f$ si et seulement si

$$\nabla(f)\left(x_0,y_0\right)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad \text{donc ssi}\quad \left\{\begin{array}{l}\partial_1(f)\left(x_0,y_0\right)=0\\ \partial_2(f)\left(x_0,y_0\right)=0\end{array}\right.$$

**Proposition 5.3**

Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U$. Si $f$ admet un extremum (local) en $(x_0, y_0) \in U$, alors $(x_0, y_0)$ est un point critique de $f$.
Le théorème précédent donne une condition nécessaire à l'existence d'un extemum local. Attention, la réciproque est fausse ; il peut exister des points critiques de $f$ qui ne sont pas des extremums locaux.

**Exercice 7**

Soit la fonction $f$ définie par $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 2xy - 4y$. Déterminer le ou les points critiques de $f$.

### V. 3 Condition suffisante d'existence d'un extremum local

**Proposition 5.4**

Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U$ et soit $(x_0, y_0)$ un point critique de $f$. Avec les notations précédentes, on a

- Si les valeurs propres de la matrice hessienne $\nabla^2(f)\,(x_0, y_0)$ sont strictement positives, alors $f$ admet un minimum local en $(x_0, y_0)$.
- Si les valeurs propres de la matrice hessienne $\nabla^2(f)\,(x_0, y_0)$ sont strictement négatives, alors $f$ admet un maximum local en $(x_0, y_0)$.
- Si les valeurs propres de la matrice hessienne $\nabla^2(f)\,(x_0, y_0)$ sont non nulles et de signes opposés, alors $f$ n'admet pas d'extremum local en $(x_0, y_0)$. On parle de point col (ou point selle).
- Si 0 est valeur propre de la matrice hessienne $\nabla^2(f)\,(x_0, y_0)$, alors on ne peut rien dire.

**Méthode :**

Lorsqu'on cherche les extrema d'une fonction $f$ :

- On commence tout d'abord par chercher les points critiques de $f$.
- Pour chaque point critique, il faudra vérifier si c'est un extremum ou non.

**Exercice 8**

Soit $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$. Déterminer, si ils existent, les extremums locaux de $f$ et préciser leurs natures.

### V. 4 Extremum global

**Définition 5.5**

Soit $f$ une fonction définie sur une partie $U$ de $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0, y_0)$ un point de $U$.

- On dit que $f$ admet un minimum global en $(x_0, y_0)$ si :

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

- On dit que $f$ admet un maximum global en $(x_0, y_0)$ si :

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

- On dit que $f$ admet un extremum global en $(x_0, y_0)$ lorsque $f$ admet soit un minimum soit un maximum global en ce point.

**Proposition 5.6**

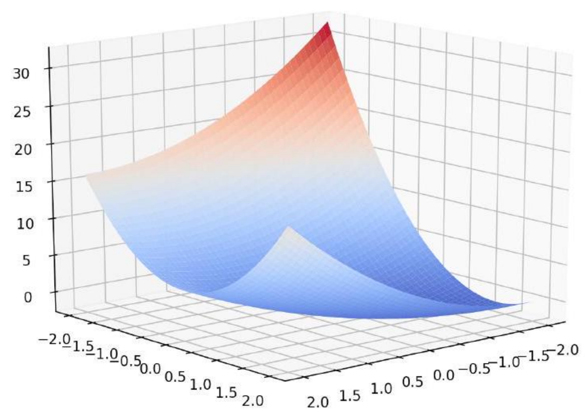
Soit $f$ une fonction continue sur une partie $F$ fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$. Alors $f$ est bornée et atteint ses bornes sur $F$. Ainsi, $f$ admet un maximum et un minimum global sur $F$.

## Remarques :

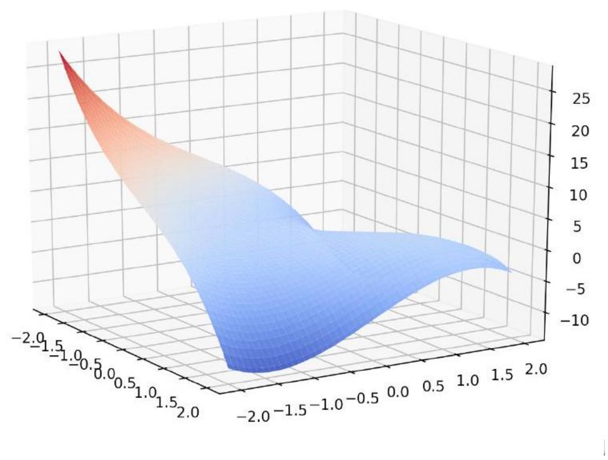
- **R1 –** Si $f$ admet extremum global en $(x_0, y_0)$, alors c'est également un extremum local donc $(x_0, y_0)$ est un point critique de $f$.
- **R2 –** Pour savoir si un extremum local en $(x_0, y_0)$ est également un extremum global, il faut comparer $f(x, y)$ et $f(x_0, y_0)$ pour tout $(x, y) \in U$. Cette étape est souvent guidée par l'énoncé.

### V. 5 Quelques illustrations

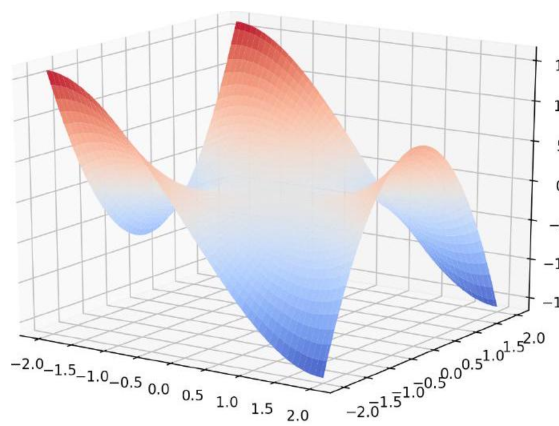
$f(x,y) = x^2 + 3y^2 + 2xy - 4y$




$f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$




$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$




$f(x,y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$