Systèmes différentiels

I. Correction d'exercices

Correction de l'exercice n°4 du cours.

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$.

On cherche à étudier le système $\begin{cases} x'(t) & = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) & = x(t) + 2y(t) \end{cases}$.

- La forme matricielle de ce système est $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X(t)$
  $X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X$.
- **Réduction de la matrice :** La matrice A admet pour valeurs propres
  - 1 associée à $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
  - 3 associée à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  On a ainsi $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- **On se ramène au cas diagonale :** L'équation devient

$$X' = PDP^{-1}X \qquad \left(P^{-1}X\right)' = AP^{-1}X$$

  en posant $Y = P^{-1}X$, on trouve alors $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y$.
- **Résolution du cas diagonale :** il existe donc deux constantes réelles α et β telles que $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha \mathrm{e}^t \\ \beta \mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}$
- **Retour au cas général :** Comme $X(t) = PY(t)$, les solutions de l'équation $X' = AX$ sont de la forme : $\boxed{t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^t + \beta \mathrm{e}^{3t} \\ -\alpha e^t + \beta \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}}$
- On résout le problème de Cauchy :

$$X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta & = & 2 \\ -\alpha + \beta & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 1$$

  L'unique solution au problème de Cauchy est

$$\boxed{t \mapsto \begin{pmatrix} e^t + \mathrm{e}^{3t} \\ -e^t + \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}}$$

Correction de l'exercice n°5 du cours.

Exercice 2

On considère le système différentiel linéaire $\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_2' = 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ x_3' = -x_1 - 2x_2 + x_3 \end{cases}$

1. Expliciter une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X' = AX$, où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
2. Justifier que A est diagonalisable. Donner sans calcul une première valeur propre de A.
3. Calculer $A^2(A - 6I)$. En déduire le spectre de A.
4. Diagonaliser A.
5. Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'expression de $X(t)$.

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. On a alors

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 \end{pmatrix} = X'$$

2. La matrice A étant symétrique, elle est diagonalisable. On note, pour $i \in [\![1, 3]\!]$ C_i les colonnes de A. On remarque que $C_2 = 2C_1 = -2C_3$, donc la matrice A n'est pas de rang 3 et n'est pas inversible. Ainsi 0 est valeur propre de A.
3. Après calcul, on trouve $A^2(A - 6I) = 0_3$. Ceci montre que le polynôme $P(X) = X^2(X - 6)$ est un polynôme annulateur de A et que $Sp(A) \subset \{0, 6\}$.
   - D'après la question précédente, on sait que rg $(A) = 1$ donc 0 est valeur propre de A.
   - $A - 6I = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On résout $(A - 6I)X = 0$:

$$\begin{cases} -5x & +2y & -z & = & 0 \\ 2x & -2y & -2z & = & 0 \\ -x & -2y & -5z & = & 0 \end{cases} \underset{\Leftrightarrow}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{L_2 \Leftarrow L_2/2}} \begin{cases} -x & -2y & -5z & = & 0 \\ x & -y & -z & = & 0 \\ -5x & +2y & -z & = & 0 \end{cases}$$

$$\underset{\Leftrightarrow}{\overset{L_2 \leftarrow L_1 + L_3}{L_3 \Leftarrow L_3 - 5L_1}} \begin{cases} -x & -2y & -5z & = & 0 \\ & -3y & -6z & = & 0 \\ & 12y & +24z & = & 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x & -2y & -5z & = & 0 \\ & -3y & -6z & = & 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 5z \\ y = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -2z \end{cases}$$

   Le système n'étant pas de Cramer, 6 est bien valeur propre de A.
4. On cherche les sous-espaces propres :
   - D'après le théorème du rang, dim $(E_0(A)) = 2$. On remarque de plus que

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0_{3,1}$$

   Comme la famille $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est clairement libre, ainsi $E_0(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

- D'après la résolution du système précédent, on trouve $E_6(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $A = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

5. L'équation matricielle devient
$$X' = PDP^{-1}X \qquad \left(P^{-1}X\right)' = AP^{-1}X$$
en posant $Y = P^{-1}X$, on trouve alors $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y$.
Les solutions de l'équation $Y' = DY$ sont de la forme
$$t \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ ce^{6t} \end{pmatrix}, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$
En effectuant le produit $X = PY$, on trouve que les solutions de l'équation $X' = AX$ sont de la forme
$$t \mapsto \begin{pmatrix} 2a - ce^{6t} \\ -a + b - 2e^{6t} \\ 2b + e^{6t} \end{pmatrix}, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$
Ainsi les fonctions x, y et z sont définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$x(t) = 2a - ce^{6t} \quad y(t) = -a + b - 2e^{6t} \quad z(t) = 2b + e^{6t} \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$