Chapitre n°10

Systèmes différentiels

I. Correction d'exercices

Correction de l'exercice n°20 du cours.

1. (a) On pose $x = y = 0$. L'équation devient $2f(0) = 2f(0)^2$ soit $(f(0)(f(0) - 1) = 0$. On en déduite qu'alors $\boxed{f(0) = 0 \text{ ou } f(0) = 1.}$

   (b) Si $f(0) = 0$, alors en posant $y = 0$ dans l'équation, on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$2f(x) = 2f(x)f(0) = 0$$

   Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0.}$

   (c) Si $f(0) = 0$ la fonction est nulle et la question est triviale. On pose $x = 0$. Alors pour tout $y \in \mathbb{R}$

   $$f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y) = 2f(y) \quad \text{ou encore } f(y) = f(-y)$$

   Donc $\boxed{f \text{ est paire}}$.

2. (a) La fonction f étant deux fois dérivable,
   - On dérive deux fois par rapport à x :

   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f''(x + y + f''(x - y) = 2f''(x)f(y)$$

   - On dérive également deux fois par rapport à y :

   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f''(x + y + f''(x - y) = 2f(x)f''(y)$$

   Donc $\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f''(x)f(y) = f(x)f''(y)}$

3. Il est clair que la fonction nulle est solution de l'équation initiale. De plus si f est solution de l'équation, alors soit $f(0) = 0$ soit $f(0) = 1$. Or $f(0) = 0$ implique que f est la fonction nulle, donc dans ce qui suit $f(0) = 1$. Comme $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$, en posant $y = 0$, l'équation

   $$f''(x)f(0) = f(x)f''(0) \quad \text{ou encore } f''(x) - f''(0)f(x) = 0$$

   Ainsi f est nécessairement solution de l'équation

   $$y'' - ay = 0 \tag{1}$$

   où $a = f''(0)$.

   Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2) coefficients constants.

4. L'équation (1) a pour équation caractéristique

   $$x^2 - a = 0$$

   Ainsi
   - Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution (réelle).

- Si $a = 0$, les solutions de (1) sont de la forme

$$y : t \mapsto \lambda t + \mu, \quad \forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Or $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, donc λ et μ sont solutions du système linéaire

$$\begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Donc l'unique solution de (1) dans ce cas est la fonction constante } y : t \mapsto 1.}$$

- Si $a > 0$, l'équation caractéristique a deux solutions : $x_1 = \sqrt{a}$ et $x_2 = -\sqrt{a}$. Les solutions de (1) sont de la forme

$$y : t \mapsto \lambda e^{t\sqrt{a}} + \mu e^{-t\sqrt{a}}, \quad \forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Or $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, donc λ et μ sont solutions du système linéaire

$$\begin{cases} \lambda & +\mu & = & 1 \\ \sqrt{a}\lambda & -\sqrt{a}\mu & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda & = & 1 \\ \lambda & = & \mu \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{Donc l'unique solution de (1) dans ce cas est la fonction constante } y : t \mapsto \frac{e^{t\sqrt{a}} + e^{-t\sqrt{a}}}{2}}.$$

On vérifie que ces fonctions sont solutions :

- Si f est définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ on a évidemment

$$f(x+y) + f(x-y) = 2 = 2f(x)f(y)$$

- Si f est définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^{x\sqrt{a}} + e^{-x\sqrt{a}}}{2}$

$$\begin{aligned} f(x+y) + f(x-y) &= \frac{1}{2}\left(e^{(x+y)\sqrt{a}} + e^{-(x+y)\sqrt{a}}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{(x-y)\sqrt{a}} + e^{-(x-y)\sqrt{a}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{(x+y)\sqrt{a}} + e^{-(x+y)\sqrt{a}} + e^{(x-y)\sqrt{a}} + e^{-(x-y)\sqrt{a}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2f(x)f(y) &= 2 \times \frac{1}{2}\left(e^{x\sqrt{a}} + e^{-x\sqrt{a}}\right) \times \frac{1}{2}\left(e^{y\sqrt{a}} + e^{-y\sqrt{a}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{(x+y)\sqrt{a}} + e^{-(x+y)\sqrt{a}} + e^{(x-y)\sqrt{a}} + e^{-(x-y)\sqrt{a}}\right) \end{aligned}$$

Donc f est bien solution.

Conclusion :

Les solutions de l'équation fonctionnelle initiale sont

- Si $f''(0) = 0$: La fonction nulle et la fonction $y : t \mapsto 1$.
- Si $f''(0) > 0$: La fonction nulle et la fonction $y : t \mapsto \dfrac{e^{t\sqrt{a}} + e^{-t\sqrt{a}}}{2}$.
- Si $f''(0) < 0$: L'unique solution réelle est la fonction nulle.