CHAPITRE N°12

Convergences et approximations

Dans tout le chapitre on ne s'intéresse qu'à des variables aléatoires réelles discrètes ou bien à densité.

I. Inégalités probabilistes

Théorème 1.1 — Inégalité de Markov

Si X est une variable aléatoire réelle à **valeurs positives** admettant une espérance alors

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \qquad \mathrm{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

Remarques :

R1 – On sait déjà que $t \mapsto P(X \geq t)$ est décroissante. Cette inégalité permet de voir que la décroissance se fait à une vitesse d'au moins $1/t$.

R2 – En combinant l'inégalité de Markov (appliquée à $|X|^r$) avec la croissance de la fonction $t \mapsto t^r$ sur $\mathbb{R}_+$, on voit que, si X admet un moment d'ordre r, alors

$$\forall t > 0 \quad P(|X| \geq t) \leq \frac{\mathrm{E}\left(|X|^r\right)}{t^r}$$

Ainsi, plus la variable admet des moments d'ordres élevés, plus les queues de probabilités décroissent vite.

Démonstration. Nous allons démontrer ce résultat dans deux situations différentes, selon que X soit une variable aléatoire discrète ou à densité. On suppose dans tous les cas que X est positive, autrement dit $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$, et que X admet une espérance. Soit $t > 0$.

- Si X est une variable aléatoire discrète, alors

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X=k) = \sum_{k<t} kP(X=k) + \sum_{k \geq t} kP(X=k) \\ &\geq \sum_{k \geq t} kP(X=k) \quad (\text{car } k \geq 0) \\ &\geq t \sum_{k \geq t} P(X=k) = tP(X \geq t) \end{aligned}$$

et on a bien $\boxed{P(X \geq t) \leq \dfrac{E(X)}{t}}$

- Si X est une variable à densité et que f est une densité de X alors, comme X est à valeurs positives, $f(x) = 0$ si $x < 0$. Il suit que

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^t xf(x)\mathrm{d}x + \int_t^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \\ &\geq \int_t^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \geq t\int_t^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = tP(X \geq t) \end{aligned}$$

et on a bien $\boxed{P(X \geq t) \leq \dfrac{E(X)}{t}}$

□

Théorème 1.2 — Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle **admettant un moment d'ordre 2** alors

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathrm{P}(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Remarque :

> Pour rappel, la variable centrée $X - E(X)$ est centrée et représente la déviation de X par rapport à son espérance. Ce théorème donne une majoration précise de la probabilité de cette déviation : X dévie de son espérance de plus de ε avec une probabilité décroissante à vitesse $1/\varepsilon^2$ (à une constante près). Le résultat n'a d'intérêt que pour ε grand.

Démonstration. Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Alors X admet une variance et donc une espérance.
On applique l'inégalité de Markov à la variable $(X - E(X))^2$, qui est bien positive et admet une espérance elle aussi. Alors, par croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) = P\left(\left(X - E(X)^2\right) \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{E\left((X - E(X))^2\right)}{\varepsilon^2} = \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

□

Exercice 1

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$.
   (a) Rappeler la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$. Que vaut $P(|X - E(X)| > t)$ pour $t \geq 1/2$?
   (b) Exprimer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.
   (a) Rappeler la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$. Que vaut $P(|X - E(X)| > t)$ pour $t > 1$?
   (b) Exprimer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 2

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n n$ v.a. (mutuellement) indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$. Montrer que

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - p\right| \geq t\right) \leq \frac{p(1-p)}{nt^2}$$

Exercice 3

On lance plusieurs fois une pièce parfaitement équilibrée. Les lancers sont indépendants. Combien de lancers faut-il effectuer pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition du Pile au cours de ces lancers sera comprise entre 49% et 51% ?

II. La loi faible des grands nombres

Théorème 2.1 — Loi faible des grands nombres.

Soit (X_n) une suite de v.a. (mutuellement) indépendantes, admettant une même espérance m et une même variance σ^2. Soit

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

Alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\bar{X}_n - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\bar{X}_n - m\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Remarque :

> Autrement dit, ce théorème signifie que la moyenne de n variables aléatoires indépendantes suivant une même loi converge vers leur espérance commune.

Démonstration. La linéarité de l'espérance et les propriétés de la variance donnent :

$$E\left(\bar{X}_n\right) = m, \quad V(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, et on obtient :

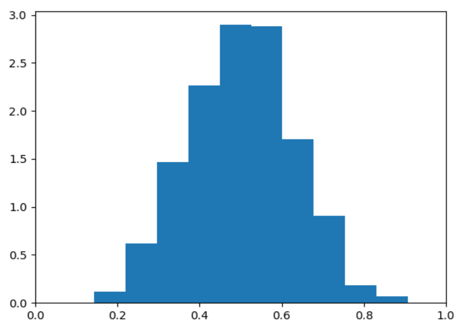
$$P\left(\left|\bar{X}_n - m\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\mid \bar{X}_n - E(\bar{X}_n) \mid \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V\left(\bar{X}_n\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

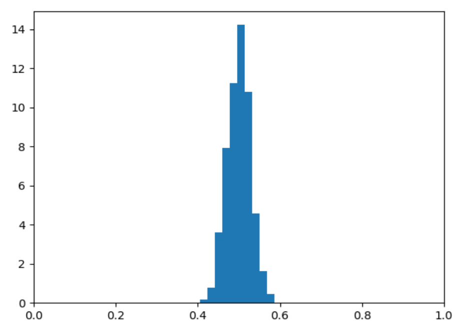
Avec Python :
On cherche à illustrer la loi des faible des grands nombres. On va commencer par calculer la moyenne de la simulation de n variables aléatoires qui suivent une loi uniforme sur $[0, 1[$. Puis on va recommencer cette expérience un grand nombre de fois et on a va visualiser ces résultats à l'aide de `hist`

```
n=100 #celui qui apparait dans le théorème
L=1000 #nombre de repetitions

Moyennes=[]
for i in range(L):
    R=.........
    Moyennes.append(.......)
plt.xlim(0,1)
plt.hist(..........)
plt.show()
```

Deux illustrations de la loi des grands nombres avec la loi uniforme



$n = 10$



$n = 1000$

Exercice 4

Modifier le programme précédent pour qu'il simule la même expérience aléatoire avec la loi exponentielle de paramètre 2.

III. Convergences

III. 1 Convergence en loi

Définition 3.1

Soient (X_n) une suite de v.a. et X une autre v.a. On note respectivement F_{X_n} et F_X les fonctions de répartition de X_n et de X. On dit que X_n converge en loi vers X, si, pour tout réel t où la fonction F_X est continue, on a

$$\lim_{n \to +\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$$

On note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Remarques :

- **R1 –** Il faut bien faire attention aux x et n.
- **R2 –** Pour montrer qu'une suite de v.a. converge en loi, on fixe d'abord un t (parmi les points où F_X est continue) et on fait ensuite tendre n vers l'infini.
- **R3 –** Si la variable X est à densité, sa fonction de répartition F_X est continue et la convergence ci-dessous doit donc avoir lieu en tout point $t \in \mathbb{R}$.
- **R4 –** Certaines suites de v.a. ne convergent pas. On gardera également à l'esprit qu'une suite de v.a. discrètes peut converger vers une v.a. à densité et inversement.

Exercice 5

Soit (X_n) une suite de v.a. telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, X_n \hookrightarrow \mathcal{E}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$. Montrer que (X_n) converge en loi vers une v.a. Z à déterminer.

Exercice 6

Soient $n \in \mathbb{N}^*, X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0; n]\!])$ et $Y_n = \dfrac{1}{n} X_n$.

1. Montrer que

$$F_{X_n}(t) = \begin{cases} 0, \text{ si } t < 0 \\ \dfrac{\lfloor t \rfloor + 1}{n+1}, \text{ si } t \in [0; n] \\ 1, \text{ si } t > 1 \end{cases}$$

2. En déduire l'expression de $F_{Y_n}(t)$.
3. Conclure que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$, où $Z \hookrightarrow \mathcal{U}([0; 1])$.

Exercice 7

Soit $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([n; n+1])$. Montrer que (X_n) ne converge pas en loi.

La proposition suivante est une conséquence des définitions de fonction de répartition et de convergence en loi.

Proposition 3.2

Soit (X_n) une suite de v.a. telle que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. Pour tous réels a, b points de continuité de F_X avec $a < b$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(a < X_n \leq b\right) = P(a < X \leq b)$$

Proposition 3.3 — Caractérisation par les varaibles aléatoires à support dans $\mathbb{Z}$.

Soient X une v.a. discrète telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$ et (X_n) une suite de v.a. discrètes avec la même propriété. Alors,

$$\left(X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X\right) \Longleftrightarrow \left(\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n\to+\infty} P\left(X_n = k\right) = P(X = k)\right)$$

Exercice 8

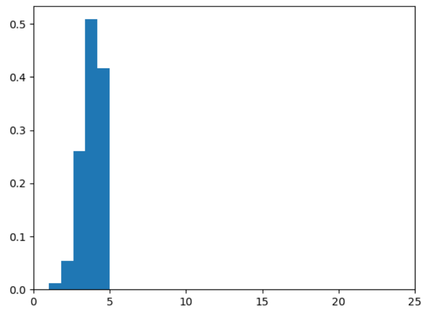
Soit (X_n) une suite de v.a. t.q. : $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\ln\left(2 + \dfrac{1}{n}\right)\right)$. Montrer que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(\ln(2))$.

III. 2 Convergence de Binomiales vers Poisson

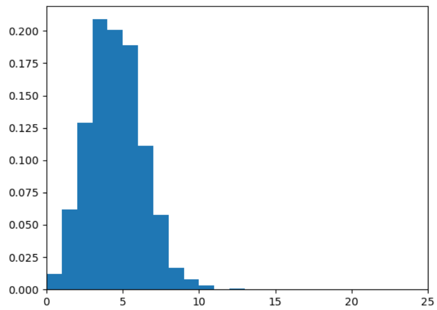
Théorème 3.4

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. telle que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \lambda/n)$ alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

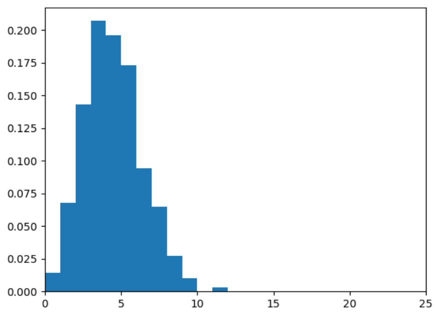
Convergence des lois binomiales $\mathcal{B}(n, 4/n)$ vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(4)$



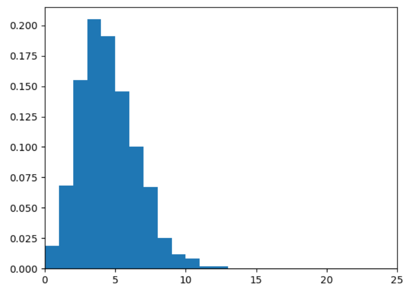
$\mathcal{B}(5, 4/5)$



$\mathcal{B}(25, 4/25)$



$\mathcal{B}(50, 4/50)$



$\mathcal{P}(4)$

Programme Python à compléter

```
lam=4
n=50
N=1000

R=rd.binomial(.............)
plt.hist()
plt.show()

##
R=rd.poisson(.......)
plt.hist()
plt.show()
```

Remarque :

> La loi de Poisson est aussi appelée *loi des évènements rares*, et ce théorème vient illustrer cette propriété. En effet, on constate qu'une loi de Poisson permet d'approcher la loi qui modélise un processus de comptage de succès lorsque la probabilité du succès est très petite devant le nombre d'observations, autrement dit que le succès devient un évènement rare.

IV. Théorème Central Limite

IV. 1 Préliminaires

Proposition 4.1 — Transformation affine d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et si a et b sont deux réel $a > 0$ et b deux réels alors la variable $Y = aX + b$ vérifie

$$Y \hookrightarrow \mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$$

Méthode :

Pour centrer et réduire une variable aléatoire : Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2 (elle admet donc une espérance μ et un écart-type σ). en posant

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

On constate que

$$E(X^*) = 0 \qquad V(X^*) = 1$$

Donc X^* est une variable aléatoire réduite et centrée !

Démonstration. En utilisant la linéarité de l'espérance

$$E(X*) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{E(X) - \mu}{\sigma} = \frac{\mu - \mu}{\sigma} = 0$$

et en utilisant la formule $V(aX + b) = a^2 V(X)$

$$V(X*) = V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{V(X)}{\sigma^2} = 1$$

□

En combinant la stabilité des lois normales pour les transformations affines et la remarque précédente, on peut transformer toute loi normale en une loi normale réduite et centrée.

Méthode :

Pour se ramener à une loi normale réduite-centrée :
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ on pose

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

D'après les résultats précédents

$$X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Réciproquement on peut écrire

$$X = \sigma X^* + \mu$$

Exemple :

Utilisation des tables de la loi normale (cf. Annexe) On considère

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(2, 4)$$

et on voudrait avoir une approximation de

$$\mathrm{P}(3 \leqslant X \leqslant 4)$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(3 \leqslant X \leqslant 4) &= \mathrm{P}(1 \leqslant X - 2 \leqslant 2) \\
&= \mathrm{P}\left(\frac{1}{2} \leqslant X^* \leqslant 1\right) \\
&= \Phi(1) - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) && \text{définition de la fonction de répartition} \\
&\approx 0,8413 - 0,6915 && \textbf{En lisant sur une table} \\
&\approx 0,1498
\end{aligned}$$

Exercice 9

Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(1, 3)$, donner une approximation de $\mathrm{P}(1 \leqslant X \leqslant \sqrt{3})$ On donne $1/\sqrt{3} \approx 0,577$.

Cas d'une somme et d'une moyenne :

Soit X_1 X_2,... X_n des variables aléatoires indépendantes de même espérance μ et de même écart-type σ. On pose

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \qquad \text{et} \qquad \overline{X_n} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

alors les variables aléatoires centrées et réduites associées sont

$$S_n^* = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad \overline{X_n}^* = \sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}$$

Démonstration.

□

IV. 2 Le théorème

Le résultat suivant est un théorème fondamental, qui peut être vu comme un aboutissement de ce cours de mathématiques appliquées. Il illustre notamment le rôle crucial de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ en statistique.

Théorème 4.2 — Théorème Central Limite (TCL)

Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes de même loi, d'espérance (commune) finie m et de variance (commune) finie (et non nulle) σ^2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad \bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$$

et

$$S_n^* = \frac{S_n - E\left(S_n\right)}{\sigma\left(S_n\right)} = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - m\right)}{\sigma} = \frac{\bar{X}_n - E\left(\bar{X}_n\right)}{\sigma\left(\bar{X}_n\right)} = \bar{X}_n^*$$

Alors,

$$S_n^* \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \quad \text{et} \quad \bar{X}_n^* \xrightarrow{\mathcal{L}} Z, \quad \text{où} \quad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

En particulier, notant Φ la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, on a, pour tous réels a, b avec $a < b$,

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(a < S_n^* \leq b\right) = \Phi(b) - \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2/2}\, \mathrm{d}t$$

Remarques :

- **R1 –** Autrement dit, les variables S_n et $\overline{X_n}$ convergent en loi vers une loi normale. La somme (ou la moyenne) de n variables aléatoires indépendantes de même loi se comporte de manière approximativement gaussienne si n est suffisamment grand.
- **R2 –** Le TCL vient préciser le résultat donné par la loi faible des grands nombres. On retrouve que la moyenne empirique converge vers la moyenne théorique, et le TCL précise que la convergence a lieu à vitesse de $1/\sqrt{n}$.

Exercice 10

Soit (U_n) une suite de v.a. indépendantes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, U_n \hookrightarrow \mathcal{U}\left(\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]\right)$. Montrer que

$$\sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{k=1}^{n} U_k \xrightarrow{\mathcal{L}} U, \quad \text{où} \quad U \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

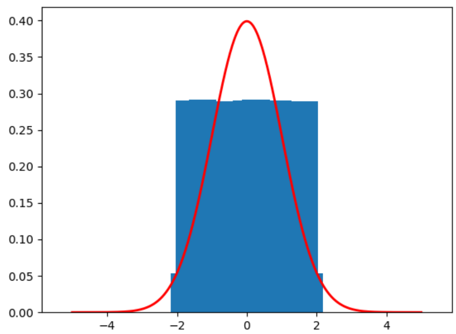
IV. 3 Une Illustration avec Python

Code Python à compléter :

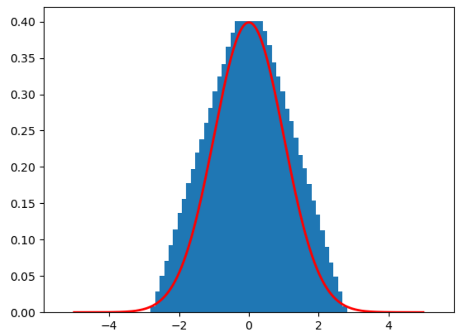
```
def phi(x):
    return ...
#tracé de la gaussienne
x=np.arange(-5,5,0.01)
y=phi(x)
plt.plot(x,y,color='red',linewidth=2)

#tracé de l'histogramme
n=50 # celui qui apparait dans la limite
L =1000000 # nombre de simulation


```

```python

sigma=...
moyenne=...
Xbarre=[]
for i in range(L):
    Xbarre.append(np.mean(rd.random(n)))


XbarreE=...



plt.hist(XbarreE)#plus compliqué en réalité
plt.show()
```

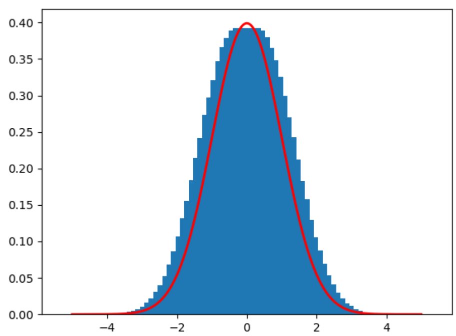
<u>**Illustration du théorème central limite**</u>



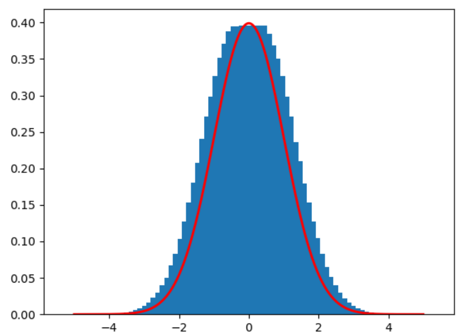
$n = 1$



$n = 3$



$n = 8$



$n = 50$

Exemple :

On suppose que l'intervalle de temps entre deux voitures successives à un passage à niveau (peu fréquenté) suit une loi exponentielle de moyenne 30 minutes. On suppose de plus qu'il y a indépendance entre les intervalles de temps séparant les instants de passage de voitures. Calculons (une valeur approchée) de la probabilité qu'il y ait plus de 50 voitures qui empruntent le passage à niveau une journée donnée.
On note X_i l'intervalle exprimé en minutes séparant le véhicule $i-1$ du véhicule i,X_1 représentant l'intervalle entre le début de la journée et le temps de passage de la première voiture.
Les $(X_i)_{i\geqslant 1}$ forment une suite de variable aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{30}$ et vérifient dont

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \qquad E(X_i) = 30 \qquad V(X_i) = 30^2 = 900 \qquad \sigma_{X_i} = 30$$

Le temps écoulé entre le début de la journée et le passage de la nième voiture est donc

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

On cherche donc à déterminer

$$\mathrm{P}(S_{50} < T)$$

où $T = 24 * 60$ est la durée d'une journée exprimée en minutes
On pose

$$\overline{X_{50}} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_50}{50} = \frac{S_{50}}{50}$$

et la variable centrée réduite associée

$$\overline{X_{50}}^* = \sqrt{50}\frac{\overline{X_{50}} - 30}{30} = \sqrt{50}\frac{S_{50} - 30 \times 50}{30 \times 50} = \frac{S_{50} - 30 \times 50}{30 \times \sqrt{50}}$$

On cherche donc à estimer la probabilité équivalente

$$\mathrm{P}\left(\overline{X_{50}}^* \leqslant \frac{T - 30 \times 50}{30 \times \sqrt{50}}\right)$$

D'après le théorème central limite, on peut faire l'approximation suivante

$$\mathrm{P}\left(\overline{X_{50}}^* \leqslant \frac{T - 30 \times 50}{30 \times \sqrt{50}}\right) = \Phi\left(\frac{T - 30 \times 50}{30 \times \sqrt{50}}\right)$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{T - 30 \times 50}{30 \times \sqrt{50}} &= \frac{24 * 60 - 30 \times 50}{30 \times \sqrt{50}} \\
&= \frac{24 * 2 - 50}{\sqrt{50}} \\
&= -\frac{2}{\sqrt{50}} \\
&\approx -0.283 \\
\Phi(-0.283) = 1 - \Phi(0.283) &\approx 1 - 0.61 \approx 0.39
\end{aligned}$$

La probabilité qu'il y ait moins de 50 voitures est environ 0.39

V. Approximations

V. 1 Approximation d'une binomiale par une loi normale

Proposition 5.1

Soit (S_n) une suite de v.a. indépendante de même loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ (avec $p \in]0;1[$). Alors,

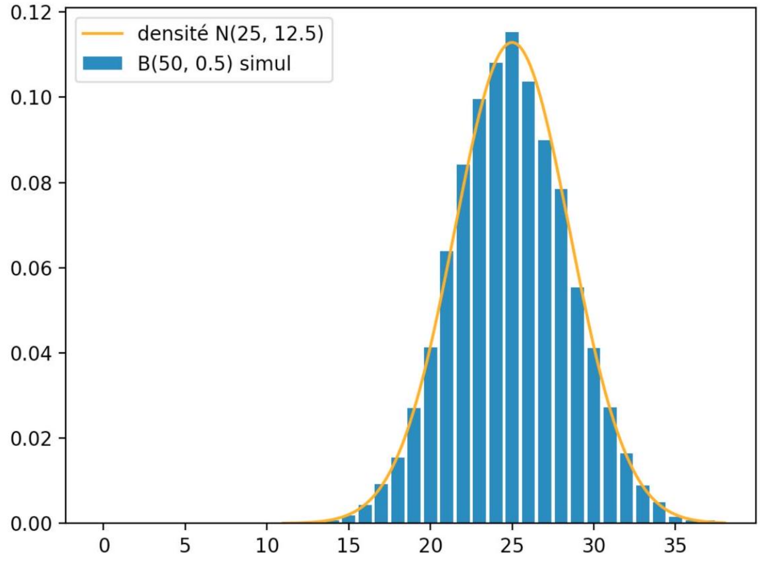
$$S_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X, \quad \text{où} \quad X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Remarques :

R1 – Une loi $\mathcal{B}(n,p)$ peut donc être approchée par une loi $\mathcal{N}(np, npq)$ lorsque n est assez grand. En pratique, cette approximation est d'autant plus valide que p est proche de 0.5 .

R2 – On approxime une loi discrète par une loi continue. En pratique on approche donc $P(S_n = k)$ non pas par $P(X = k)$ (qui vaut 0), mais par $P(k - 1/2 \leq X \leq k + 1/2)$.

R3 – D'après le programme officiel : *"Toutes les indications devront êtres fournies aux candidats quant à la justification de l'utilisation des approximations."* Dans la pratique, on estime raisonnable d'approcher une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par une loi normale $\mathcal{N}(np, npq)$ lorsque $n \geq 30, np \geq 5$ et $nq \geq 5$.



Exercice 11

On lance 900 fois une pièce de monnaie équilibrée et on note X le nombre de Pile obtenus. On veut estimer $\alpha = P(405 \leq X \leq 495)$.

1. Quelle est la valeur exacte de α ? (On exprimera le résultat sous forme d'une somme qu'on ne cherchera naturellement pas à calculer.)
2. Utiliser la table de la loi normale centrée réduite pour donner une estimation de α.

V. 2 Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale

Proposition 5.2

Soit (S_n) une suite de v.a. indépendante de même loi de Poisson $\mathcal{P}(n\alpha)$ (avec $\alpha > 0$). Alors,

$$S_n^* = \frac{S_n - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X, \quad \text{où} \quad X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Remarques :

R1 – Une loi $\mathcal{P}(\lambda)$ peut donc être approchée par une loi $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$ lorsque λ est assez grand.

R2 – Comme pour l'approximation précédente, on suivra les indications du texte.