Composite

E C G

Devoir Libre

Option Économique

MATHÉMATIQUES

Pour le jeudi 29 janvier 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.
Les questions précédées de (*) sont destinées aux cubes.

Exercice n°1

1. Donner un exemple d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe un réel K élément de $]0;1[$ tel que, pour tout couple (x, y) de réels, on ait :
$$|f(x) - f(y)| \leqslant K \times |x - y| \qquad (*)$$
On considède pour toute la suite une fonction f vérifiant la condition précédente. On dit que f est K-contractante.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. À l'aide de la relation $(*)$, montrer par l'absurde que l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution.
4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée du réel u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$|u_{n+1} - u_n| \leqslant K^n \times |u_1 - u_0|$$
   (b) Établir la convergence de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note a sa limite.
   (c) Conclure que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.
5. On désigne par n et p des entiers naturels, avec $p \geqslant 1$.
   (a) Justifier que l'on a : $\displaystyle\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \times |u_1 - u_0|$.
   (b) En déduire l'inégalité :
   $$|u_{n+p} - u_n| \leqslant K^n \times \frac{1 - K^p}{1 - K}|u_1 - u_0|$$

(c) Établir enfin l'inégalité suivante :

$$|a - u_n| \leqslant \frac{K^n}{1-K} \times |u_1 - u_0|$$

6. Étude d'un exemple : on considère la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{1+e^t}$$

(a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(t)$ et $f''(t)$ pour tout réel t.

(b) Déterminer les variations de f' sur $\mathbb{R}$ et établir enfin l'inégalité :

$$\forall t \in \mathbb{R}, |f'(t)| \leqslant \frac{1}{4}$$

(c) En déduire que f est $\frac{1}{4}$-contractante.

(d) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n. Montrer que cette suite est convergente. On note toujours a sa limite.

(e) Compléter la fonction `Python` ci-dessous afin qu'elle renvoie, pour une valeur donnée de n la valeur de u_n à l'appel de `suite(n)` :

```
def suite(n):
        u=———
        for k in range(1,n+1):
                u=———
        return u
```

(f) En s'appuyant sur le résultat de la question 5.(c), établir que u_n est une valeur approchée de a à moins de 10^{-3} près dès que n vérifie $4^n \geqslant \frac{2000}{3}$.

(g) En déduire un programme `Python`, utilisant la fonction précédente, qui calcule et affiche la valeur approchée de a qui en résulte.

Problème

Un banquier s'est imposé de vendre une action en dix jours ouvrables. Chaque jour, suivant le cours du jour, il décide de vendre ou d'attendre dans l'espoir de vendre mieux plus tard. S'il n'a pas réalisé la vente au neuvième jour, il s'impose de vendre son action au dixième jour. Quelle stratégie va-t-il choisir ?
Le problème ci-dessous propose, dans un cadre théorique précis, d'évaluer diverses stratégies pour de tels choix en chaîne.
On considère une suite d'expériences aléatoires identiques et indépendantes, à laquelle on associe une suite $(X_i)_{i\geqslant 1}$ de variables aléatoires, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et toutes de même loi.
On considère un entier naturel non nul n.
Si n est égal à 1, on définit le gain G_1 par : $G_1 = X_1$ et le temps d'attente L_1 par $L_1 = 1$.
Si n est supérieur ou égal à 2, on se donne pour chaque $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, un seuil σ_i ; et on définit le gain G_n par et le temps d'attente L_n par :

- si, pour tout i strictement inférieur à n, $X_i < \sigma_i$; alors $G_n = X_n$ et $L_n = n$
- et sinon, $G_n = X_k$ et $L_n = k$ où k est le plus petit rang i tel que $X_i \geqslant \sigma_i$.

Le gain G_n est une variable aléatoire dont l'espérance est notée g_n.
Le temps d'attente L_n est une variable aléatoire dont l'espérance est notée ℓ_n
(Dans l'exemple introductif du banquier, n est égal à 10, X_i représente le cours de l'action au jour de rang i, G_{10} est égal au prix de la vente et L_{10} est égal au rang du jour où a lieu la vente).

On étudie, en partie **I** trois stratégies dans le cas d'expériences aléatoires discrètes et en partie **II**, deux stratégies dans le cas d'expériences aléatoires continues. Le préliminaire sera utilisé en **I.2**, **I.3** et **II.3**.
Les parties I et II sont dans une large mesure indépendantes.

Préliminaire

Soit x un réel de $[0,1[$ et soit k un entier naturel non nul, on pose $S_k(x) = \sum_{j=1}^{k} jx^{j-1}$
Calculer $S_k(x)$ en fonction de x et de k (On pourra considérer $(1-x)S_k(x)$).

I. Exemples d'expériences aléatoires discrètes.

Dans cette partie r **est un entier impair,** supérieur ou égal à 3, et on suppose que, pour tout i entier naturel non nul, la variable aléatoire X_i est discrète et équirepartie sur l'ensemble $\left\{0, \frac{1}{r}, \frac{2}{r}, \ldots, \frac{r}{r}\right\}$ (chacune des $r+1$ valeurs étant prise avec la même probabilité).

1. Première stratégie.
   On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\sigma_1 = 0$. On a donc, pour tout entier naturel n non nul,$G_n = X_1$ et $L_n = 1$
   Calculer l'espérance g_n de la variable aléatoire G_n (On rappelle que $\sum_{j=1}^{k} j = \frac{k(k+1)}{2}$)
2. Deuxième stratégie,
   On pose, pour tout entier n supérieur au égal à 2 et pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\sigma_i = 0,5$
   (a) Calculer $P(X_1 < 0,5)$.
   (b) Exprimer, en fonction des variables $X_1, \ldots, X_n$, l'événement $\left(G_n = \frac{j}{r}\right)$ pour $j \in \left\{0, \ldots, \frac{r-1}{2}\right\}$, puis pour $j \in \left\{\frac{r+1}{2}, \ldots, r\right\}$
   En déduire que la loi de G_n est donnée par :
   $$\begin{array}{lll} \forall j & \in & \left\{0, \ldots, \frac{r-1}{2}\right\} \quad P\left(G_n = \frac{j}{r}\right) = \frac{2}{r+1}\frac{1}{2^n} \\ \forall j & \in & \left\{\frac{r+1}{2}, \ldots, r\right\} \quad P\left(G_n = \frac{j}{r}\right) = \frac{2}{r+1}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \end{array}$$
   (c) Calculer g_n. Montrer que la suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
   Déterminer la limite de g_n quand n tend vers $+\infty$ avec r fixé. Pouvait-on prévoir ce résultat ?
   Déterminer la limite de g_n quand r tend vers $+\infty$ avec n fixé.
   (d) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
   Calculer $P(L_n = n)$. Montrer que $\forall j \in \{1, \ldots, n-1\}$: $P(L_n = j) = \frac{1}{2^j}$
   Calculer l'espérance ℓ_n de L_n
   Déterminer la limite de ℓ_n quand n tend vers $+\infty$ avec r fixé.
3. Troisième stratégie.
   On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\sigma_i = 1$.
   (a) Exprimer, en fonction des variables $X_1, \ldots, X_n$ l'événement $\left(G_n = \frac{j}{r}\right)$ pour $j \in \{0, \ldots, r-1\}$
   En déduire la loi de G_n
   (b) Calculer g_n Montrer que la suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
   Déterminer la limite de g_n quand n tend vers $+\infty$ avec r fixé. Pouvait-on prévoir ce résultat ?
   Déterminer la limite de g_n quand n tend vers $+\infty$ avec n fixé.

(c) Calculer l'espérance ℓ_n de L_n
Déterminer la limite de ℓ_n quand n tend vers $+\infty$ avec r fixé.
Déterminer la limite de ℓ_n, quand r tend vers $+\infty$ avec n fixé. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

4. Comparer brièvement les trois stratégies de la partie **I** .

II. Exemples d'expériences aléatoires continues

Dans cette partie, on suppose que, pour tout entier naturel non nul i, la variable aléatoire X_i suit une loi de probabilité uniforme sur $[0,1]$; elle admet donc une densité φ définie par : $\forall t \in [0,1] : \varphi(t)$ et sinon $\varphi(t) = 0$
On dit que les variables,$(X_i)_{i\geqslant 1}$ sont indépendantes si et seulement si, pour tout entier naturel n non nul et pour tout $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, les événements $(X_1 \leqslant t_1), \dots, (X_n \leqslant t_n)$ sont mutuellement indépendants ; on a alors, pour tout $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n,\ P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \leqslant t_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant t_i)$.
(Les variables étant des variables à densité, les égalités ci-dessus sont encore vraies si on remplace $(X_i \leqslant t_i)$ par $(X_i < t_i)$)

1. Déterminer F_1 la fonction de répartition de X_1.
2. Première stratégie
On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\sigma_1 = 0$
Calculer l'espérance g_n de la variable aléatoire G_n
3. Deuxième stratégie
Soit un réel $\alpha \in [0,1[$. On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $\sigma_i = \alpha$

(a) On note F_n la fonction de répartition de G_n
Que vaut $F_n(t)$ pour t n'appartenant pas à $[0,1[$?
Pour $t \in [0,\alpha[$ décrire l'événement $(G_n \leqslant t)$ et en déduire $F_n(t)$
Pour $t \in [\alpha,1[$ décrire l'événement $(G_n > t)$ et en déduire $F_n(t)$
Montrer que G_n admet une densité f_n définie par :

$$\forall t \in [0,\alpha[: f_n(t) = \alpha^{n-1},\ \ \forall t \in [\alpha,1] : f_n(t) = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha},\ \text{ et }\ f_n(t) = 0\ \text{ sinon}$$

(b) Calculer g_n en fonction de α. Montrer que la suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
Déterminer la limite de g_n quand n tend vers $+\infty$. Pouvait-on prévoir ce resultat ?

(c) Déterminer la loi L_n. Calculer ℓ_n

(d) Dans cette question $\alpha = 0,5$
Calculer g_n et ℓ_n
Quelle remarque peut-on faire en comparant ces résultat avec ceux de la deuxième stratégie de la partie **I** ?