

Estimation

. Correction de l'exercice n°1

1.

$$E(\overline{X_n}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k) = E(X_1) = -1 \times P(X = -1) + 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) = \boxed{0}$$

2. Pour que $aX_n + b$ soit un estimateur sans biais, cela nécessite que $E(aX_n + b) = b = p$. Or un estimateur de p se doit d'être une fonction de $X_1, \dots, X_n$ indépendante de p . Un tel estimateur n'existe donc pas.

3. (a) On a $T_n = \varphi(X_1, \dots, X_n)$ où $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{cases}$ est indépendante de p . Donc T_n est un estimateur de p . Comme les variables X_i sont à support fini, elles admettent des moments de tous ordres, donc T_n également.

$$E(T_n) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n E(X_k^2) = \frac{n}{2n} (1^2 \times P(X^2 = 1) + 0 \times P(X^2 = 0)) = \boxed{\frac{2p}{2} = p}$$

Ainsi T_n est un estimateur sans biais de p .

(b) D'après le lemme des coalitions les variables $(X_1^2, \dots, X_n^2)$ sont mutuellement indépendantes, donc

$$V(T_n) = \frac{1}{4n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i^2)$$

Or d'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$V(X_1^2) = E(X_1^4) - E(X_1^2)^2 = 2p - (2p)^2 = \boxed{2p(1 - 2p)}$$

Ainsi

$$V(T_n) = \frac{2pn(1 - 2p)}{4n^2} = \boxed{\frac{p(1 - 2p)}{2n}}$$

(c) Comme T_n est un estimateur sans biais, son risque quadratique est donné par

$$r(T_n) = V(T_n) = \frac{p(1 - 2p)}{2n}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p(1 - 2p)}{2n} = 0$ donc T_n est un estimateur convergent.

. Correction de l'exercice n°2

1.
 - La fonction $x \mapsto 0$ est continue sur $]-\infty, a[$ et $x \mapsto \frac{3a}{x^4}$ est continue sur $]a, +\infty[$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en a .
 - Comme $a > 0$, la fonction f est clairement positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

- Comme pour tout $x < a$, $f(x) = 0$, $\int_{-\infty}^a f(t) dt$ converge et vaut 0.

Soit $A > a$.

$$\int_a^A f(t) dt = 3a^3 \int_a^A t^{-4} dt = 3a^3 \left[\frac{1}{-3t^3} \right]_a^A = 3a^3 \left(-\frac{1}{3A^3} + \frac{1}{3a^3} \right)$$

Comme $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{3A^3} = 0$, $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = 1$$

Donc f est une densité de probabilité.

2. T admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)| dt$ converge. De même, d'après le théorème de transfert,

T admet une variance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |t^2 f(t)| dt$ converge.

- Comme pour tout $x < a$, $f(x) = 0$, $\int_{-\infty}^a |tf(t)| dt$ et $\int_{-\infty}^a |t^2 f(t)| dt$ convergent et valent 0.

- Soit $A > a$.

$$\int_a^A |tf(t)| dt = 3a^3 \int_a^A t^{-3} dt = 3a^3 \left[\frac{1}{-2t^2} \right]_a^A = 3a^3 \left(-\frac{1}{2A^2} + \frac{1}{2a^2} \right)$$

$$\int_a^A |t^2 f(t)| dt = 3a^3 \int_a^A t^{-2} dt = 3a^3 \left[\frac{1}{-t} \right]_a^A = 3a^3 \left(-\frac{1}{A} + \frac{1}{a} \right)$$

Comme $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A} = 0$, $\int_a^{+\infty} |tf(t)| dt$ et $\int_a^{+\infty} |t^2 f(t)| dt$ convergent, donc T admet une espérance et une variance et :

$$E(T) = \frac{3a^3}{2a^2} = \boxed{\frac{3a}{2}}$$

$$E(T^2) = \frac{3a^3}{a} = 3a^2$$

D'après la formule de Koenig-Huygens,

$$V(T) = E(T^2) - E(T)^2 = 3a^2 - \frac{9a^2}{4} = \boxed{\frac{3a^2}{4}}$$

3. (a) Comme $T(\Omega) \subset [a, +\infty[$, pour tout $t < a$, $\boxed{F(t) = P(T \leq t) = 0}$. De plus, pour $t \geq a$:

$$P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = \int_a^t f(x) dx = 3a^3 \left(-\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3a^3} \right) = 1 - \left(\frac{a}{t} \right)^3$$

$$(b) P(T > 2a) = 1 - F(2a) = \left(\frac{a}{2a} \right)^3 = \boxed{\frac{1}{8}}.$$

$$P_{[T > 2a]}(T > 6a) = \frac{P([T > 2a] \cap [T > 6a])}{P(T > 2a)} = \frac{P(T > 6a)}{P(T > 2a)} = \frac{2^3}{6^3} = \boxed{\left(\frac{1}{3} \right)^3}$$

4. (a) On a $Z_n = \varphi(T_1, \dots, T_n)$ où $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto \frac{2}{3n} \sum_{k=1}^n x_k \end{cases}$ est indépendante de a . Donc Z_n est un estimateur. Comme les variables T_i admettent une espérance, Z_n également.

$$E(Z_n) = \frac{2}{3n} \sum_{k=1}^n E(T_k) = \frac{2}{3n} \times n \times \frac{3a}{2} = \boxed{a}$$

Ainsi Z_n est un estimateur sans biais de a .

(b) Comme Z_n est un estimateur sans biais, son risque quadratique est donné,

$$r(Z_n) = V(Z_n)$$

Par indépendance,

$$r(Z_n) = \frac{4}{9n^2} \sum_{k=1}^n V(T_k) = \frac{4}{9n^2} \times n \times \frac{3a^2}{4} = \boxed{\frac{a^2}{3n}}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^2}{3n} = 0$ donc Z_n est un estimateur convergent.

. Correction de l'exercice n°4

1. (a) La variable Y_n compte le nombre de succès ' $X_i = 0$ ' lors de la répétition de n expériences de Bernoulli ' X_i vaut 0 ou non' identiques et indépendantes. Ainsi Y suit une loi Binomiale de paramètres n et

$$p = P(X_i = 0) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}.$$

Ainsi Y_n/n dépend bien des variables $X_1, \dots, X_n$ en étant indépendante de $e^{-\lambda}$ donc Y_n/n est un estimateur de $e^{-\lambda}$. De plus

$$E\left(\frac{Y_n}{n}\right) = \frac{np}{n} = p = e^{-\lambda}$$

Donc Y_n/n est un estimateur sans biais de $e^{-\lambda}$.

- (b) Comme Y_n/n est un estimateur sans biais, son risque quadratique est donné,

$$r(Y_n/n) = V(Y_n/n) = \frac{V(Y_n)}{n^2} = \frac{ne^{-\lambda}(1 - e^{-\lambda})}{n^2} = \boxed{\frac{e^{-\lambda}(1 - e^{-\lambda})}{n}}$$

2. Question classique faite en classe.
3. Par stabilité des lois de Poisson, et comme les X_i sont indépendantes, S_n suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(n\lambda)$.
D'après le théorème de transfert, $E(e^{-\overline{X}_n}) = E(e^{-S_n/n})$ existe si et si $\sum_{n \geq 0} |e^{-k/n} P(S_n = k)|$ converge. Soit

$N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^N |e^{-k/n} P(S_n = k)| = e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^N e^{-k/n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} = e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^N \frac{(e^{-1/n} \lambda n)^k}{k!}$$

On reconnaît une série exponentielle, donc celle-ci converge et $E(e^{-\overline{X}_n})$ existe.

$$E(e^{-\overline{X}_n}) = e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^{-1/n} \lambda n)^k}{k!} = e^{-n\lambda} e^{\lambda n e^{-1/n}} = e^{\lambda n(e^{-1/n} - 1)} \neq e^{-\lambda}$$

Ainsi est un estimateur biaisé de $e^{-\lambda}$.