

Option Économique

MATHÉMATIQUES

17 Novembre 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Les questions précédées de () sont destinées aux cubes.*

Exercice n°1

Partie I : Réduction d'une matrice carrée

1. (a) D'après l'affichage Python : $A^3 = A$.
- (b) D'après la question précédente, le polynôme $P(X) = X^3 - X$ est un polynôme annulateur de A . Or,

$$P(X) = X(X^2 - 1) = X(X - 1)(X + 1)$$

On en déduit que

$$\text{Sp}(A) \subset \{ \text{racines de } P(X) \} = \{-1, 0, 1\}$$

Ainsi, les valeurs propres possibles de A sont $-1, 0$ et 1 .

2. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
U \in E_{-1}(A) &\iff (A + I)U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ -2x - 2z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \quad L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 0 \\ 8y + 4z = 0 \quad L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1 \\ 2y + z = 0 \quad L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3x - 2y = -2z \\ 2y = -z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3x = -3z \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 2y = -z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -z \\ y = -\frac{1}{2}z \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
E_{-1}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \text{ et } y = -\frac{1}{2}z \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ -\frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \\
&= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$E_{-1}(A) \neq \{0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ donc -1 est valeur propre de A . De plus, la famille $\mathcal{F}_{-1} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$:

- engendre $E_{-1}(A)$

- est libre car constituée d'un unique vecteur non nul donc $\mathcal{F}_{-1}$ est une base de $E_{-1}(A)$.

$$\begin{aligned}
U \in E_0(A) &\iff AU = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ -2x - 3z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ -2x - 3z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y + z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -2y - z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y = -z \\ 2y = -z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x = -3z \\ 2y = -z & L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -\frac{3}{2}z \\ y = -\frac{1}{2}z \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
E_0(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \left| x = -\frac{3}{2}z \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{2}z \right. \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}z \\ -\frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \left| z \in \mathbb{R} \right. \right\} \\
&= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$E_0(A) \neq \{0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ donc 0 est valeur propre de A . De plus, la famille $\mathcal{F}_0 = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$:

- engendre $E_0(A)$
- est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

donc $\mathcal{F}_0$ est une base de $E_0(A)$.

$$\begin{aligned}
U \in E_1(A) &\iff (A - I)U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ x & + 2z = 0 \\ -2x & - 4z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ x & + 2z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&\iff \begin{cases} x = -2z \\ y = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
E_1(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -2z \quad \text{et} \quad y = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$E_1(A) \neq \{0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ donc 1 est valeur propre de A . De plus, la famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) :$

? engendre $E_1(A)$

- est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

donc $\mathcal{F}_1$ est une base de $E_1(A)$.

Les valeurs propres possibles de A sont $-1, 0, 1$ et on a vérifié que chacune d'elles est une valeur propre de A . Donc

$$\text{Sp}(A) = \{-1, 0, 1\}$$

3. La matrice A est carrée d'ordre 3 et admet trois valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable. Ainsi, il existe

- une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, obtenue en concaténant les bases des sous-espaces propres de A

- une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A

telles que $A = PDP^{-1}$.

On pose alors $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par la formule de changement de base, on a bien $A = PDP^{-1}$.

4. Récurrence classique

Partie II : Etude d'un système différentiel linéaire

5. Raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 2y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = -2x(t) - 3z(t) \end{cases} \\ &\iff X \text{ est solution de } (S) \end{aligned}$$

6. Soit $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} (u, v, w) \text{ est un état d'équilibre de } (S) &\iff A \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in E_0(A) \end{aligned}$$

$$\iff \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{cf question 2.a)}$$

On en déduit que l'ensemble des états d'équilibre de (S) est

$$\text{Vect}((3, 1, -2)) = \{\lambda(3, 1, -2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

7. Question classique faite en classe.

8. La matrice A est diagonalisable (cf question 2.b)) et on a montré à la question 2.a) que (U_{-1}, U_0, U_1) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A . D'après le cours, les solutions de (S) sont toutes de la forme

$$\begin{aligned} X(t) &= \alpha e^{-t} U_{-1} + \beta e^{0t} U_0 + \gamma e^t U_1 \\ &= \alpha e^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma e^t U_1 \end{aligned}$$

où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

9. (a) i. On considère une solution X quelconque de (S) :

$$\begin{aligned}
X(t) &= \alpha e^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma e^t U_1 \\
X \text{ est solution de } (\mathcal{P}_1) &\iff X(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \\
&\iff \alpha U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 2\alpha + 3\beta - 2\gamma = 9 \\ \alpha + \beta = 4 \\ -2\alpha - 2\beta + \gamma = -8 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2\alpha + 3\beta - 2\gamma = 9 \\ -\beta + 2\gamma = -1 \\ \beta - \gamma = 1 \end{cases} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \\
&\iff \begin{cases} 2\alpha + 3\beta - 2\gamma = 9 \\ -\beta + 2\gamma = -1 \\ \gamma = 0 \end{cases} \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \\
&\iff \begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 9 \\ -\beta = -1 \\ \gamma = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_1)$ est

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X_1(t) = 3e^{-t} U_{-1} + U_0 = \begin{pmatrix} 6e^{-t} + 3 \\ 3e^{-t} + 1 \\ -6e^{-t} - 2 \end{pmatrix}$$

- ii. D'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6e^{-t} + 3 \\ 3e^{-t} + 1 \\ -6e^{-t} - 2 \end{pmatrix}$$

donc $x_1(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 3$, $y_1(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 1$ et $z_1(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} -2$. Ainsi la trajectoire associée à la solution X_1 est convergente, de point limite $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = (3, 1, -2)$. D'après la question **g**, ce point limite est un état d'équilibre du système différentiel (S) .

- (b) i. On considère une solution X quelconque de (S) :

$$\begin{aligned}
X(t) &= \alpha e^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma e^t U_1 \\
X \text{ est solution de } (\mathcal{P}_2) &\iff X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&\iff \alpha U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 2\alpha + 3\beta - 2\gamma = 3 \\ \alpha + \beta = 2 \\ -2\alpha - 2\beta + \gamma = -3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2\alpha + 3\beta - 2\gamma = 3 \\ -\beta + 2\gamma = 1 & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ \beta - \gamma = -3 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2\alpha + 3\beta - 2\gamma = 3 \\ -\beta + 2\gamma = 1 \\ \gamma = 1 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases} \\
&\iff \alpha = \beta = \gamma = 1
\end{aligned}$$

Ainsi, l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_2)$ est

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X_2(t) = e^{-t} U_{-1} + U_0 + e^t U_1 = \begin{pmatrix} 2e^{-t} + 3 - 2e^t \\ e^{-t} + 1 \\ -2e^{-t} - 2 + e^t \end{pmatrix}$$

ii. D'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} + 3 - 2e^t \\ e^{-t} + 1 \\ -2e^{-t} - 2 + e^t \end{pmatrix}$$

On remarque alors que $z_2(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$. Ainsi la trajectoire associée à la solution X_2 est divergente.

(c) La figure 4 est la seule où l'on a $z(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$. Ainsi, cette figure correspond nécessairement à la solution X_2 .

- Dans la figure 3, on a $z(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty$. Donc cette figure correspond à une trajectoire divergente. Ainsi, cette figure ne correspond pas à la solution X_1 .
- Dans la figure 1, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0$. Cette propriété n'est pas vérifiée par la solution X_1 donc cette figure ne correspond pas à X_1 .
- Par élimination, la figure 2 correspond à la solution X_1 . De plus, en lisant approximativement les valeurs limites sur le graphe, le tracé est cohérent avec le fait que $x_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 3, y_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$ et $z_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -2$.

Partie III : Exponentielle d'une matrice carrée

10. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \alpha_n M &= \alpha_n \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_n a & \alpha_n b & \alpha_n c \\ \alpha_n d & \alpha_n e & \alpha_n f \\ \alpha_n g & \alpha_n h & \alpha_n i \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \ell a & \ell b & \ell c \\ \ell d & \ell e & \ell f \\ \ell g & \ell h & \ell i \end{pmatrix} = \ell \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \ell M \end{aligned}$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} M_n + M'_n &= \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_n & b'_n & c'_n \\ d'_n & e'_n & f'_n \\ g'_n & h'_n & i'_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_n + a'_n & b_n + b'_n & c_n + c'_n \\ d_n + d'_n & e_n + e'_n & f_n + f'_n \\ g_n + g'_n & h_n + h'_n & i_n + i'_n \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} a + a' & b + b' & c + c' \\ d + d' & e + e' & f + f' \\ g + g' & h + h' & i + i' \end{pmatrix} = M + M' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_n M'_n &= \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_n & b'_n & c'_n \\ d'_n & e'_n & f'_n \\ g'_n & h'_n & i'_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_n a'_n + b_n d'_n + c_n g'_n & a_n b'_n + b_n e'_n + c_n h'_n & a_n c'_n + b_n f'_n + c_n i'_n \\ d_n a'_n + e_n d'_n + f_n g'_n & d_n b'_n + e_n e'_n + f_n h'_n & d_n c'_n + e_n f'_n + f_n i'_n \\ g_n a'_n + h_n d'_n + i_n g'_n & g_n b'_n + h_n e'_n + i_n h'_n & g_n c'_n + h_n f'_n + i_n i'_n \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} aa' + bd' + cg' & ab' + be' + ch' & ac' + bf' + ci' \\ da' + ed' + fg' & db' + ee' + fh' & dc' + ef' + fi' \\ ga' + hd' + ig' & gb' + he' + ih' & gc' + hf' + ii' \end{pmatrix} = MM' \end{aligned}$$

devront référer précisément à ces questions lorsque ces résultats seront utilisés.

11. Soit $k \in \mathbb{N}$. La matrice D étant diagonale, on a

$$D^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
S_n(D) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} D^k \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} \frac{1}{k!} a^k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k!} b^k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k!} c^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} a^k & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} b^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} c^k \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

en reconnaissant des sommes partielles de séries exponentielles. Ainsi,

$$e^D \text{ existe et } e^D = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix}$$

12. (a) On a

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $k \geq 3$, $M^k = M^3 M^{k-3} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} M^{k-3} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Finalement,

$$\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}, M^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } k = 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } k = 1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } k = 2 \\ \underline{0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}} & \text{si } k \geq 3 \end{cases}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} S_n(M) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^k && \text{par Chasles, car } n \geq 2 \\ &= \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} M^k + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k!} M^k && \text{car } M^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \text{ si } k \geq 3 \\ &= \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} M^k \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(S_n(M))$ est constante à partir du rang 2. On en déduit que

$$S_n(M) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$e^M \text{ existe et } e^M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13. (a) On a

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3M$$

et

$$M^3 = M^2 M = (3M)M = 3M^2 = 3(3M) = 3^2 M$$

(b) D'après la question précédente, on conjecture que $M^k = 3^{k-1}M$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Montrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(k)$

où $\mathcal{P}(k) : M^k = 3^{k-1}M$.

Initialisation :

D'une part, $M^1 = M$. D'autre part, $3^{1-1}M = 3^0M = M$. D'où $\mathcal{P}(1)$.

Hérédité :

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}(k)$. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\begin{aligned} M^{k+1} &= MM^k \\ &= M(3^{k-1}M) \\ &= 3^{k-1}M^2 && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 3^{k-1}(3M) && \text{cf la question 6.a)} \\ &= 3^kM \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

Par principe de récurrence, on a montré que pour tout $k \in \mathbb{N}^*, M^k = 3^{k-1}M$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} S_n(M) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^k \quad \text{par Chasles, car } n \geq 1 \\ &= M^0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} M^k \\ &= I + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} 3^{k-1}M \\ &= I + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} 3^k M \\ &= I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} - \frac{3^0}{0!} \right) M \\ &= I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} - 1 \right) M \end{aligned}$$

Vérifions que cette égalité est valable pour $n = 0$.

- D'une part, $S_0(M) = \sum_{k=0}^0 \frac{1}{k!} M^k = \frac{1}{0!} M^0 = I$
- D'autre part, $I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^0 \frac{3^k}{k!} - 1 \right) M = I + \frac{1}{3}(1 - 1)M = I$

(d) On reconnaît une somme partielle de série exponentielle, d'où

$$\frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} - 1 \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} (e^3 - 1)$$

D'après la question 3.a),

$$\frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} - 1 \right) M \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{e^3 - 1}{3} M$$

puis, d'après la question 3.b),

$$S_n(M) = I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} - 1 \right) M \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I + \frac{e^3 - 1}{3} M$$

Donc

$$e^M \text{ existe et } e^M = I + \frac{e^3 - 1}{3} M$$

14. (a) D'après la question 2.b), $A = PDP^{-1}$. On en déduit par récurrence immédiate que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_n(tA) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (tA)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} A^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} PD^kP^{-1} \\ &= P \left(\sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} D^k \right) P^{-1} \\ &= P \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (tD)^k \right) P^{-1} \\ &= PS_n(tD)P^{-1} \end{aligned}$$

- (b) On remarque que la matrice tD est diagonale et, plus précisément,

$$tD = \begin{pmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

D'après la question 4, la matrice e^{tD} existe et vaut

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

Ceci veut exactement dire que

$$S_n(tD) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

D'après la question 3.b) et la question précédente, on a alors

$$S_n(tA) = PS_n(tD)P^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Pe^{tD}P^{-1}$$

On en déduit que e^{tA} existe et $e^{tA} = P\Delta(t)P^{-1}$ avec

$$\Delta(t) = e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

En généralisant ce résultat, on montre alors que l'exponentielle d'une matrice diagonalisable est une matrice diagonalisable (on ne demande pas de le faire).

15. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} e^{tA}C &= Pe^{tD}P^{-1}P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ &= Pe^{tD} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} \alpha e^{-t} \\ \beta \\ \gamma e^t \end{pmatrix} \\ &= P \left(\alpha e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \alpha e^{-t} P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma e^t P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \alpha e^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma e^t U_1 \\ &= X(t) \end{aligned}$$

cf question 7.b)

où l'on a utilisé le fait que P est précisément la matrice obtenue en concaténant les vecteurs colonnes U_{-1} , U_0 et U_1 .

(b) Considérons une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants d'ordre 1 :

$$y' = ay$$

où $a \in \mathbb{R}^*$ est un paramètre.

D'après le cours, les solutions de cette équation sont de la forme :

$$y(t) = ce^{at}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Ainsi, on a montré à la question précédente que les solutions de $X' = AX$ admettaient une «formule exponentielle» analogue : $c \in \mathbb{R}$ est analogue à $C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (paramètre(s) à choisir) et e^{at} est analogue à e^{tA} .

Exercice n°2

Partie A

Notons que pour tout $x > 0$, on peut mettre $\varphi(x)$ sous la forme :

$$\varphi(x) = \ln(x) - ae^{2a \ln(x)}.$$

1. En 0^+ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty \\ e^{2a \ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \end{array} \right. \quad (\text{car, comme } a > 0, 2a \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty) \quad \text{donc } \varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty.$$

En $+\infty$, il s'agit d'une forme indéterminée « $+\infty + (-\infty)$ », que l'on peut lever en utilisant les résultats de croissances comparées :

comme $2a > 0$, $\ln(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(x^{2a})$ donc $\ln(x) - ae^{2a \ln(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -ae^{2a \ln(x)}$, d'où $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

2. La fonction φ est dérivable et pour tout $x > 0$:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 2a^2 x^{2a-1} = \frac{1 - 2a^2 x^{2a}}{x}$$

Le signe de $\varphi'(x)$ est celui du numérateur $1 - 2a^2 x^{2a}$ qui est l'expression d'une fonction strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et s'annulant en $x_0 = \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$ (donc « positive puis négative »).

On en déduit le tableau de variations de φ :

x	0	x_0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+	0	-
φ	$-\infty$	$\varphi(x_0)$	$-\infty$

L'énoncé ne précise pas si une expression de $\varphi(x_0)$ en fonction de a est attendue, mais elle nous servira pour la question suivante :

$$\varphi(x_0) = \varphi\left(\left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}\right) = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{1}{2a^2}\right) - a \frac{1}{2a^2} = -\frac{1}{2a} (\ln(2a^2) + 1).$$

3. Déterminons le signe de $\varphi(x_0)$, maximum de φ atteint en x_0 , en fonction de a :

$$\begin{aligned}
 \varphi(x_0) > 0 &\iff -\frac{1}{2a} (\ln(2a^2) + 1) > 0 \\
 &\iff \ln(2a^2) + 1 < 0 \\
 &\iff \ln(2a^2) < -1 \\
 &\iff 2a^2 < e^{-1} \quad (\text{croissance de exp}) \\
 &\iff a^2 < \frac{1}{2e} \\
 &\iff a < \sqrt{\frac{1}{2e}} \quad (\text{croissance de } x \mapsto \sqrt{x} \text{ sur } \mathbf{R}^+ \text{ (et } a > 0))
 \end{aligned}$$

D'où le tableau de signes :

a	0	$\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$+\infty$
$\varphi(x_0)$	+	0	-

Par conséquent :

- Si $a < \frac{1}{\sqrt{2e}}$:
La fonction φ est continue et strictement croissante sur $]0, x_0[$, donc réalise une bijection de $]0, x_0[$ dans $] \lim_{0} \varphi, \varphi(x_0)[=]-\infty, \varphi(x_0)[$; ce dernier intervalle contenant 0, il existe un unique réel $z_1 \in]0, x_0[$ tel que $\varphi(z_1) = 0$.
De même, φ réalise une bijection (décroissante) de $]x_0, +\infty[$ dans $] -\infty, \varphi(x_0)[$, donc il existe un unique réel $z_2 \in]x_0, +\infty[$ tel que $\varphi(z_2) = 0$.
- Si $a = \frac{1}{\sqrt{2e}}$, alors $\varphi(x_0) = 0$ et, d'après le tableau de variation déterminé en question 2., $\varphi(x) < 0$ pour $x \neq x_0$. Donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution : x_0 .
- Si $a > \frac{1}{\sqrt{2e}}$, étant donné les variations de φ , cette fonction est strictement négative et l'équation $\varphi(x) = 0$ n'admet aucune solution.

Partie B

4. Les fonctions (d'une variable réelle) $\ln$ et $t \mapsto t^a$ étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur leurs intervalles de définition, par opérations algébriques, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U .
5. Pour tout $(x, y) \in U$:

$$\partial_1(f)(x, y) = \frac{1}{x} \ln(y) - ax^{a-1}y^a \quad ; \quad \partial_2(f)(x, y) = \frac{1}{y} \ln(x) - ax^ay^{a-1}.$$

6. Les points critiques de f sont les points (x, y) de U annulant le gradient de f :

$$\begin{aligned}
\nabla(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} \partial_1(f)(x, y) = 0 \\ \partial_2(f)(x, y) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \frac{1}{x} \ln(y) - ax^{a-1}y^a = 0 \\ \frac{1}{y} \ln(x) - ax^ay^{a-1} = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \frac{1}{x}(\ln(y) - ax^ay^a) = 0 \\ \frac{1}{y}(\ln(x) - ax^ay^a) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \ln(y) = ax^ay^a \\ \ln(x) = ax^ay^a \end{cases} \quad (1/x \text{ et } 1/y \text{ sont non nuls}) \\
&\iff \begin{cases} \ln(y) = ax^ay^a \\ \ln(x) = \ln(y) \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\
&\iff \begin{cases} \ln(x) = ax^ax^a \\ x = y \end{cases} \quad (\ln \text{ est bijective sur } \mathbf{R}^{+*}; \text{ report dans } L_1) \\
&\iff \begin{cases} \varphi(x) = 0 \\ x = y \end{cases}
\end{aligned}$$

7. Les solutions de l'équation $\varphi(x) = 0$ sont données par la question 3. ; on obtient donc avec la question 6. :

- Si $a < \frac{1}{\sqrt{2e}}$: f admet deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2) .
- Si $a = \frac{1}{\sqrt{2e}}$: f admet un unique point critique : (x_0, x_0) .
- Si $a > \frac{1}{\sqrt{2e}}$: f n'admet pas de point critique.

Partie C

8. Pour tout $(x, y) \in U$:

$$\begin{cases} \partial_{1,1}^2(f)(x, y) &= \frac{-1}{x^2} \ln(y) - a(a-1)x^{a-2}y^a \\ \partial_{1,2}^2(f)(x, y) &= \frac{1}{xy} - a^2(xy)^{a-1} \\ \partial_{2,1}^2(f)(x, y) &= \frac{1}{xy} - a^2(xy)^{a-1} \\ \partial_{2,2}^2(f)(x, y) &= \frac{-1}{y^2} \ln(x) - a(a-1)x^ay^{a-2} \end{cases}$$

9. Comme z_1 vérifie $\varphi(z_1) = \ln(z_1) - az_1^{2a} = 0$, on a :

$$\partial_{1,1}^2(f)(z_1, z_1) = \frac{-1}{z_1^2} \underbrace{\ln(z_1)}_{=az_1^{2a}} - a(a-1)z_1^{a-2}z_1^a = -\cancel{az_1^{2a-2}} - a(\cancel{a-1})z_1^{2a-2} = -a^2z_1^{2a-2}.$$

Les expressions de $\partial_{1,1}^2(f)(x, y)$ et $\partial_{2,2}^2(f)(x, y)$ étant identiques en échangeant x et y , le même calcul donne :

$$\partial_{2,2}^2(f)(z_1, z_1) = -a^2z_1^{2a-2}.$$

Enfin :

$$\partial_{1,2}^2(f)(z_1, z_1) = \partial_{2,1}^2(f)(z_1, z_1) = \frac{1}{z_1^2} - a^2 (z_1^2)^{a-1} = \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2}$$

10. On a :
$$MX_1 = \begin{pmatrix} -a^2 z_1^{2a-2} & \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} & -a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix}$$

donc $MX_1 = \left(\frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} \right) X_1$.

De même,
$$MX_2 = \begin{pmatrix} -a^2 z_1^{2a-2} & \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} & -a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1^2} \\ -\frac{1}{z_1^2} \end{pmatrix}$$

donc $MX_2 = -\frac{1}{z_1^2} X_2$.

Par conséquent, les nombres $\lambda_1 = \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2}$ et $\lambda_2 = -\frac{1}{z_1^2}$ sont valeurs propres de la matrice M (et X_1, X_2 sont des vecteurs propres associés respectivement à ces deux valeurs). Puisque (X_1, X_2) est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$, il ne peut y avoir d'autre valeur propre :

$$\text{Sp}(M) = \left\{ \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2}, -\frac{1}{z_1^2} \right\}.$$

11. Avec les notations précédentes, clairement : $\lambda_2 < 0$.

On peut utiliser la question 2. pour déterminer le signe de λ_1 en remarquant que :

$$\lambda_1 = \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} = \frac{1 - 2a^2 z_1^{2a}}{z_1^2} = \frac{1}{z_1} \varphi'(z_1)$$

Comme z_1 est dans $]0, x_0[$, intervalle sur lequel φ' est strictement positive, on en déduit : $\lambda_1 > 0$.

Par conséquent, la matrice hessienne de f au point critique (z_1, z_1) admet deux valeurs propres non nulles et de signes opposés, donc f ne présente pas en ce point d'extremum local (il s'agit d'un point col).

12. En (z_2, z_2) , les calculs sont similaires et on obtient :

$$\text{Sp}(\nabla^2(f)(z_2, z_2)) = \left\{ \underbrace{\frac{1}{z_2^2} - 2a^2 z_2^{2a-2}}_{=\lambda'_1}, \underbrace{-\frac{1}{z_2^2}}_{=\lambda'_2} \right\}.$$

Comme en question 11. :

$$\lambda'_1 = \frac{1}{z_2} \varphi'(z_2).$$

Mais ici, comme z_2 est dans $]x_0, +\infty[$, intervalle sur lequel φ' est strictement *négative*, on en déduit : $\lambda'_1 < 0$.

Par conséquent, la matrice hessienne de f au point critique (z_2, z_2) admet deux valeurs propres strictement négatives, donc f présente en ce point un maximum local.