

Concours Blanc n°3

Option Économique

MATHÉMATIQUES

2 Mars 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice n°1

Partie 1 : Réduction d'une matrice carrée

On considère la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. On fournit le code Python dont le résultat de l'exécution est fourni ci-après.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

A=np.array([[2,-2,2],[1,1,2],[-2,0,-3]])
print(al.matrix_power(A,3))
```

Affichage Python

```
»»[[2,-2,2],[1,1,2],[-2,0,-3]]
```

- (a) Dédurre de l'affichage Python ci-dessus une égalité entre deux matrices.
 - (b) Quelles sont alors les seules valeurs propres possibles de A ?
2. Déterminer le spectre de A .
 3. Déterminer une matrice D diagonale dont les coefficients sont rangés dans l'ordre croissant et une matrice P inversible de première ligne $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ telles que $A = PDP^{-1}$.
 4. Montrer que, pour tout entier $k \geq 0$, on a $A^k = PD^kP^{-1}$.

Partie 2 : Résolution d'un système différentiel linéaire

On considère le système différentiel

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 2y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = -2x(t) - 3z(t) \end{cases}$$

où les inconnues x, y, z sont des fonctions définies de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

5. Montrer que X est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t)$.
6. Le système différentiel $(\mathcal{S})$ possède-t-il des équilibres ? Si oui, les déterminer.
7. Soit Y définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $Y(t) = P^{-1}X(t)$. Montrer que X est solution de $X' = AX$ si et seulement si Y est solution de $Y' = DY$.
8. Montrer que les solutions du système différentiel $(\mathcal{S})$ peuvent s'écrire sous la forme

$$X(t) = \alpha e^{-t}U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 e^t$$

où α, β, γ sont des constantes réelles et $U_{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $U_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

9. On considère les problèmes de Cauchy

$$(\mathcal{P}_1) \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}_2) \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- (a)
 - i. Déterminer l'unique solution X_1 du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_1)$.
 - ii. Montrer que la trajectoire associée à la solution X_1 est convergente. Expliciter le point limite (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) . Quelle propriété possède ce point vis-à-vis du système linéaire $(\mathcal{S})$?
- (b)
 - i. Déterminer l'unique solution X_2 du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_2)$.
 - ii. Montrer que la trajectoire associée à la solution X_2 est divergente.
- (c) On a représenté ci-après les tracés de quatre solutions du système $(\mathcal{S})$. Expliciter quelles figures sont les tracés associés aux solutions X_1 et X_2 étudiées ci-avant. Justifier la réponse.

Figure 1

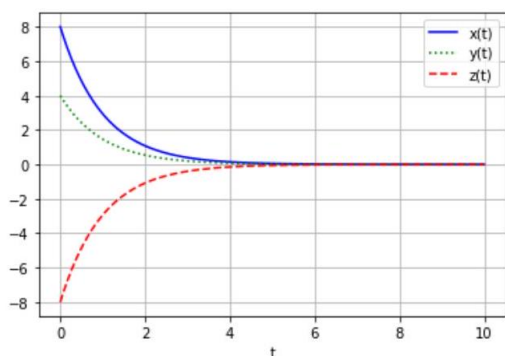


Figure 2

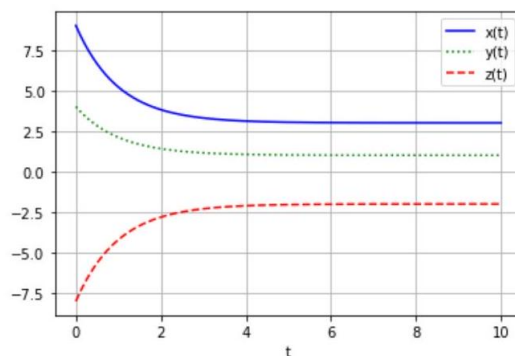


Figure 3

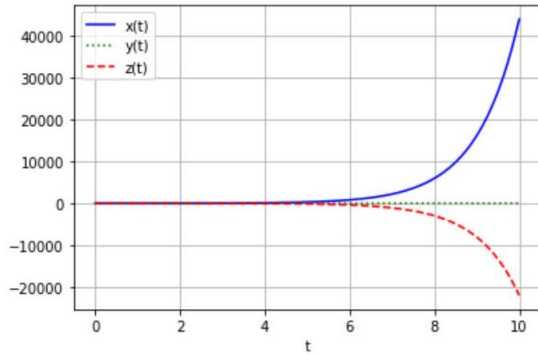
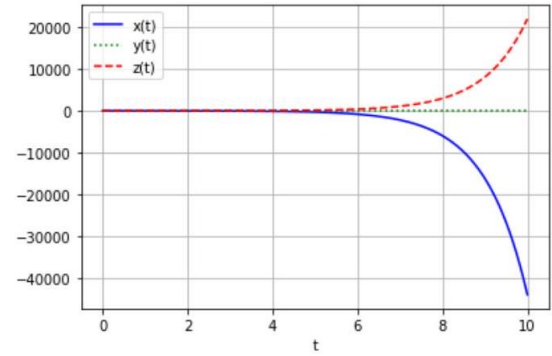


Figure 4



Partie 3 : Exponentielle d'une matrice carrée

Si $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n), (f_n), (g_n), (h_n), (i_n)$ désignent neuf suites convergentes, de limites respectives a, b, c, d, e, f , et si (M_n) est une suite de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix}$$

on dit que la suite de matrices (M_n) admet une limite coefficient par coefficient, et on note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose, pour tout entier naturel n

$$S_n(M) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^k$$

Lorsque $(S_n(M))$ admet une limite coefficient par coefficient, on note e^M cette limite.

10. Deux premiers résultats théoriques. On utilisera les notations du préambule de cette partie pour les démonstrations.

- (a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et soit (α_n) une suite réelle convergente, de limite ℓ . Montrer que la suite de matrices $(\alpha_n M)$ admet une limite coefficient par coefficient et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n M = \ell M$$

- (b) Soient (M_n) et (M'_n) deux suites de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui admettent chacune une limite coefficient par coefficient, notées respectivement M et M' .

Montrer que la suite de matrices $(M_n M'_n)$ admet une limite coefficient par coefficient et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n M'_n = M M'$$

11. Montrer que, si $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ est diagonale, alors e^D existe et vaut $e^D = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix}$.

12. Dans cette question, la matrice M est donnée par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- (a) Calculer M^2 et M^3 puis, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, déterminer M^k .

- (b) Donner, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression de $S_n(M)$. En déduire l'existence et l'expression de la matrice e^M .

13. Dans cette question, la matrice M est donnée par $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- (a) Calculer M^2 .
 (b) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, déterminer pour tout k de $\mathbb{N}$ l'expression de M^k en fonction de k .
 (c) Établir, pour tout entier naturel n , l'égalité suivante

$$S_n(M) = I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} - 1 \right) M$$

- (d) En déduire que e^M existe et que

$$e^M = I + \frac{e^3 - 1}{3} M$$

14. Dans cette question, on considère la matrice A de la Partie 1 et on fixe un réel t .

- (a) Déduire de la Question (4) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(tA) = PS_n(tD)P^{-1}$$

- (b) Conclure que e^{tA} existe et en donner une expression sous la forme $e^{tA} = P\Delta(t)P^{-1}$. On explicitera la matrice $\Delta(t)$ sous forme de tableau matriciel en fonction de t .

En généralisant ce résultat, on montre alors que l'exponentielle d'une matrice diagonalisable est une matrice diagonalisable (on ne demande pas de le faire).

15. On reprend les notations de la Question 8 et on considère une solution X de $(\mathcal{S})$ de la forme

$$X(t) = \alpha e^{-t}U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 e^t$$

- (a) Expliciter e^{tA} pour tout $t \in \mathbb{R}$.
 (b) En posant $C = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, montrer que $X(t) = e^{tA} \cdot C$.
 (c) Commenter le résultat de la dernière question, au regard des résultats du cours sur les équations différentielles du premier ordre à coefficient constant.

Exercice n°2

Dans tout l'exercice, a est un réel strictement positif.

Partie A

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall x > 0, \varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$.

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.
- Étudier les variations de la fonction φ et dresser son tableau de variations.

On fera apparaître dans ce tableau le réel $x_0 = \left(\frac{1}{2a^2} \right)^{\frac{1}{2a}}$.

- Démontrer que si $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2 , vérifiant : $z_1 < x_0 < z_2$.

Que se passe-t-il si $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$? Si $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$?

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'ouvert $U = (\mathbb{R}^{+*})^2$ par :

$$\forall (x, y) \in U, f(x, y) = \ln(x) \ln(y) - (xy)^a.$$

4. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U .
5. Calculer les dérivées partielles premières de f .
6. Démontrer que pour tout $(x, y) \in U$:

$$(x, y) \text{ est un point critique de } f \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

7. Démontrer que si $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$, la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2) , où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie A.

Déterminer aussi les éventuels points critiques de f dans les cas où $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$ et $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$.

Partie C

Dans cette partie, on suppose que $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$. On rappelle alors que la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2) , où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie A.

8. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f .
9. Calculer la matrice hessienne de f au point (z_1, z_1) . Vérifier que cette matrice peut s'écrire sous la forme :

$$\nabla^2(f)(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} -a^2 z_1^{2a-2} & \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} & -a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix}.$$

10. On pose $M = \nabla^2(f)(z_1, z_1)$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculer MX_1 et MX_2 , et en déduire les valeurs propres de M .

11. Donner la nature du point critique (z_1, z_1) ?
12. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_2, z_2) ?
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

Exercice n°3

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Partie A : Loi de Pareto

Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ a \frac{b^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Pareto de paramètres a et b lorsqu'elle admet pour densité la fonction f . Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X suivant la loi de Pareto de paramètres a et b .

2. Montrer que la fonction de répartition de X est

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

3. (a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.
Montrer que la variable aléatoire $bU^{-\frac{1}{a}}$ suit la loi de Pareto de paramètres a et b .
- (b) En déduire une fonction Python d'en-tête `def pareto(a,b)` qui prend en arguments deux réels a et b strictement positifs et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X .
- (c) On considère la fonction Python ci-dessous.
Que contient la liste L renvoyée par la fonction `mystere` ?

```
def mystere(a,b):  
    L=[]  
    for p in range(2,7):  
        S=0  
        for k in range(10**p):  
            S=S+pareto(a,b)  
        L.append(S/(10**p))  
    return(L)
```

- (d) On exécute la fonction précédente avec différentes valeurs de a et de b .
Comment interpréter les résultats obtenus ?

```
>>> mystere(2,1)  
[1.7133631758003538, 2.009140747774733, 1.9797234072207492,  
 1.9926329359791048, 2.002770892911245]
```

```
>>>mystere(3,2)  
[3.142040193342796, 3.001320614188584, 3.0157501677045904,  
 2.997374375830247, 3.001079125435106]
```

```
>>>mystere(1,4)  
[13.03672364154, 48.27366131635537, 113.56440209585794,  
 68.58098214883513, 82.40483013939732]
```

4. (a) Montrer que X admet une espérance si et seulement si $a > 1$ et que, dans ce cas :

$$E(X) = \frac{ab}{a-1}$$

- (b) Montrer que X admet une variance si et seulement si $a > 2$ et que, dans ce cas :

$$V(X) = \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}$$

Partie B : Estimation du paramètre b

On suppose **dans cette partie uniquement** que $a = 3$ et on cherche à déterminer un estimateur performant de b .

Ainsi, la variable aléatoire X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ \frac{3b^3}{x^4} & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X .

On définit :

$$Y_n = \min(X_1, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad Z_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

On admet que Y_n et Z_n sont encore des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

5. (a) Calculer, pour tout x de $[b, +\infty[$, $P(Y_n > x)$.
 (b) En déduire que Y_n suit une loi de Pareto dont on précisera les paramètres.
 (c) Montrer que $Y'_n = \frac{3n-1}{3n} Y_n$ est un estimateur sans biais de b .
 Calculer le risque quadratique de cet estimateur.
6. (a) Déterminer l'espérance et la variance de Z_n .
 (b) En déduire un estimateur noté Z'_n sans biais de b de la forme αZ_n où α est un réel à préciser.
 Calculer le risque quadratique de cet estimateur.
7. Entre Y'_n et Z'_n , quel estimateur choisir ? Justifier.

Partie C : Estimation du paramètre a

On suppose **dans cette partie uniquement** que $b = 1$ et on cherche à construire un intervalle de confiance pour a .

Ainsi, la variable aléatoire X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X .

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $W_n = \ln(X_n)$.
 Montrer que la variable aléatoire W_n suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
 En déduire l'espérance et la variance de W_n .
9. On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$M_n = \frac{\ln(X_1) + \dots + \ln(X_n)}{n} \quad \text{et} \quad T_n = \sqrt{n} (a M_n - 1)$$

- (a) Justifier que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
- (b) En déduire que l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n} M_n} ; \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n} M_n} \right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour a au niveau de confiance 95%.
On admettra que $\Phi(2) \geq 0,975$, où Φ désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.