

Option Économique
MATHÉMATIQUES

2 Mars 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Introduction

On s'intéresse dans ce problème à la détermination de lois de probabilités composées qui interviennent en particulier dans la gestion du risque en assurance et en théorie de la ruine. On étudie le modèle suivant :

- le nombre de sinistres à prendre en charge par une compagnie d'assurances sur une période donnée est une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$;
- les coûts des sinistres successifs sont modélisés par une suite de variables aléatoires $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$. On suppose que les variables U_k sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et identiquement distribuées, et sont indépendantes de N ;
- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \sum_{k=1}^n U_k$ et X_0 est la variable certaine de valeur 0 ;
- la charge sinistrale totale pour la compagnie d'assurance sur une période est donnée par la variable aléatoire X définie par :

$$X = \sum_{k=1}^N U_k$$

et l'on précise que $X = X_0 = 0$ si N prend la valeur 0. **On dit que X suit une loi composée.**

- Pour tout entier naturel j , on pose $p_j = P(N = j)$, $q_j = P(U_1 = j)$ et $r_j = P(X = j)$.

Partie I – Des exemples

Dans cette partie I, on suppose que les variables U_k suivent la loi de Bernoulli de paramètre p , où p est un réel de l'intervalle $]0; 1[$.

1. Pour n dans $\mathbb{N}$, quelle est la loi de X_n ?
2. Pour tout entier naturel j , établir : $r_j = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_n = j)p_n$.
3. Dans cette question 3, on suppose que N suit la loi binomiale de paramètres m , entier naturel, et α , réel dans $]0; 1[$. Soit j un entier naturel.
 - (a) Justifier que $r_j = 0$ si $j > m$.
 - (b) Établir : si $j \in \llbracket 0, m \rrbracket$, $r_j = \sum_{n=j}^m \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \alpha^n (1-\alpha)^{m-n}$.
 - (c) Vérifier : pour tous entiers j, n, m tels que $0 \leq j \leq n \leq m$,

$$\binom{n}{j} \binom{m}{n} = \binom{m}{j} \binom{m-j}{n-j}$$

- (d) En déduire, pour tout $j \in \llbracket 0, m \rrbracket$:

$$r_j = \binom{m}{j} (p\alpha)^j \sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} [(1-p)\alpha]^\ell (1-\alpha)^{m-j-\ell}$$

- (e) Montrer finalement que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres en fonction de m, p et α .
4. On suppose dans cette question 4 que N suit la loi de Poisson de paramètre λ , réel strictement positif.
 - (a) Montrer que pour tout entier naturel j , on a :

$$r_j = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} [\lambda(1-p)]^{n-j}$$

- (b) En déduire que X suit une loi de Poisson, et préciser son paramètre en fonction de p et λ .

Partie II – La loi binomiale négative

On généralise la définition des coefficients binomiaux aux nombres réels en posant, pour tout y réel et tout entier $k \in \mathbb{N}$:

$$\binom{y}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (y-i), \quad \text{et} \quad \binom{y}{0} = 1$$

5. Écrire une fonction Python d'entête `def cb(y,k):` qui calcule $\binom{y}{k}$.

6. *La formule du binôme négatif.*

Soit c un réel strictement positif, et x un réel de $[0; 1[$.

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}} dt$.

- (a) Calculer I_0 .
- (b) Montrer que pour tout x strictement positif, et pour tout entier n

$$I_n = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \frac{c+n+1}{n+1} I_{n+1}$$

(c) Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^n \binom{c+k-1}{k} x^k + c \binom{c+n}{n} I_n.$$

(d) Vérifier que pour tout $t \in [0; x] : 0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x$.

En déduire l'encadrement : $0 \leq I_n \leq \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$.

(e) i. Montrer, pour tout n dans $\mathbb{N} : \binom{c+n}{n} = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{c}{k}\right)$.

ii. Montrer que pour tout réel t strictement plus grand que -1 , $\ln(1+t) \leq t$.

iii. Établir, pour tout entier naturel $k \geq 2 : \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$.

En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$.

iv. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N} : \ln \left[\binom{c+n}{n} \right] \leq c(1 + \ln(n))$.

En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$.

(f) En conclure que la série $\sum_{k \geq 0} \binom{c+k-1}{k} x^k$ est convergente, et établir la formule du binôme négatif :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^c}$$

7. Soit p un réel de $]0; 1[$ et r un réel strictement positif.

Montrer que la suite de nombres $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $p_k = \binom{r+k-1}{k} (1-p)^k p^r$ définit une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On l'appelle *loi binomiale négative* de paramètres r et p .

8. Si Y est une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres 1 et p , reconnaître la loi de $Y+1$.

9. *Espérance et variance.*

Soit Z une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres r réel strictement positif et $p \in]0; 1[$.

(a) Montrer : pour tout entier $k \geq 1$, $k \binom{r+k-1}{k} = r \binom{r+k-1}{k-1}$.

(b) Montrer que Z admet une espérance et que l'on a : $E(Z) = \frac{r(1-p)}{p}$.

(c) Montrer que Z admet une variance et que l'on a : $V(Z) = \frac{r(1-p)}{p^2}$.

On pourra commencer par calculer l'espérance de $Z(Z-1)$.

Partie III – Les lois de Panjer

On reprend les notations du début du problème : la variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ a sa loi donnée par $p_k = P(N=k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

On suppose dans toute la suite du sujet que la loi de N vérifie la relation de Panjer : il existe deux réels a et b , avec $a < 1$ et $a+b > 0$, tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}.$$

On dira alors que N suit la loi $\mathcal{P}(a, b)$.

10. Détermination des lois de Panjer.

- (a) Montrer que pour tout entier k strictement positif, on a : $p_k = p_0 \prod_{i=1}^k \left(a + \frac{b}{i}\right)$.
- (b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$.
Montrer que N suit une loi de Poisson de paramètre b .
- (c) Dans cette question, on suppose que $a < 0$.
- Montrer qu'il existe un unique entier naturel r , tel que : $\forall k > r, p_k = 0$ et $\forall k \leq r, p_k \neq 0$. On pourra raisonner par l'absurde, et supposer les p_k tous strictement positifs.
 - Montrer : $b = -a(r+1)$.
 - Établir que pour tout $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$, $p_k = (-a)^k \binom{r}{k} p_0$.
- En déduire que $p_0 = \frac{1}{(1-a)^r}$.
- En conclure que N suit une loi binomiale et préciser les paramètres en fonction de a et b .
- (d) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

- Montrer que pour tout entier naturel k , on a : $p_k = \binom{\frac{b}{a} + k}{k} a^k p_0$.
- En déduire que N suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de a et b .

11. Montrer que, dans tous les cas, N admet une espérance et une variance, et qu'elles sont données par :

$$E(N) = \frac{a+b}{1-a} \quad \text{et} \quad V(N) = \frac{a+b}{(1-a)^2}$$

Partie IV – L'algorithme de Panjer

- On reprend les notations de l'introduction du sujet et de la partie III.
- Si A est un événement de probabilité non nulle et Y une variable aléatoire discrète admettant une espérance, on définit l'espérance de la loi conditionnelle de Y sachant A par

$$E_A(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y P_A(Y = y)$$

- On admet que cette espérance conditionnelle a les mêmes propriétés que l'espérance.
- Linéarité, si Y_1 et Y_2 sont deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance et α un réel, alors

$$E_A(Y_1 + \alpha Y_2) = E_A(Y_1) + \alpha E_A(Y_2)$$

- Théorème de transfert. Si g est une fonction telle que $g(Y)$ admette une espérance alors

$$E_A(g(Y)) = \sum_{y \in Y(\Omega)} g(y) P_A(Y = y)$$

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $P(X_n = 0)$ en fonction de q_0 puis établir que $r_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} q_0^n p_n$.

13. Soit $j \in \mathbb{N}$.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, que vaut $E_{(X_n=j)}(X_n)$? En déduire : $E_{(X_n=j)}(U_1) = \frac{j}{n}$.
- (b) Établir :

$$r_j = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_n = j) \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} E_{(X_n=j)} \left(a + \frac{b}{j} U_1\right) P(X_n = j) p_{n-1}$$

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$E_{(X_n=j)} \left(a + \frac{b}{j} U_1 \right) P(X_n = j) = \sum_{i=0}^j \left(a + \frac{bi}{j} \right) P(U_1 = i) P(X_{n-1} = j - i)$$

(d) En conclure : $r_j = \sum_{i=0}^j \left(a + \frac{bi}{j} \right) q_i r_{j-i}$, puis :

$$r_j = \frac{1}{1 - aq_0} \left(\sum_{i=1}^j \left(a + \frac{bi}{j} \right) q_i r_{j-i} \right)$$

Cette formule permet de calculer récursivement les nombres r_j et ainsi de déterminer la loi de X .

14. Des exemples d'application.

(a) Dans cette question, les variables U_i suivent la loi de Bernoulli de paramètre p .

i. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $r_j = \frac{p}{1 - a + ap} \left(a + \frac{b}{j} \right) r_{j-1}$.

En déduire que X suit une loi de Panjer.

ii. Retrouver les résultats des questions **3** et **4** de la partie I.

(b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$, rappelons que cela entraîne que N suit la loi de Poisson de paramètre b .

Soit p un réel de l'intervalle $]0; 1[$.

i. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que la famille de nombres $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ définie par $q_i = \alpha \frac{p^i}{i}$ définisse une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ (*loi logarithmique discrète*).
On pose $q_0 = 0$.

On suppose que les variables U_k suivent cette loi de probabilité.

ii. Montrer que pour tout entier $j \geq 1$, on a : $r_j = \frac{b\alpha}{j} \sum_{i=1}^j p^i r_{j-i}$.

iii. En utilisant un changement d'indice, établir que pour tout $j \geq 2$: $r_j = \left(p + \frac{p(b\alpha - 1)}{j} \right) r_{j-1}$, puis montrer que cette égalité est encore vérifiée pour $j = 1$.

iv. Conclure que X suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de b , α et p .