
Correction du Devoir Surveillé n° 1 -ESSEC/HEC

07/10/22

Partie II - La loi binomiale négative

Pour tout entier $k > 1$ et tout réel y ,

$$\binom{y}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (y-i) = \frac{y-k+1}{k} \frac{1}{(k-1)!} \prod_{i=0}^{k-2} (y-i) = \frac{y-k+1}{k} \binom{y}{k-1}.$$

Cette relation de récurrence conduit à la fonction récursive suivante :

```
import numpy as np
def cb(y,k):
    N=[y-k for k in range(k)]
    D=[k for k in range (k+1)]
    return (np.prod(N)/np.prod(k))
```

5. (a) Par définition, $I_0 = \int_0^x \frac{1}{(1-t)^{c+1}} dt = \left[\frac{1}{c(1-t)^c} \right]_0^x = \boxed{-\frac{1}{c} + \frac{1}{c(1-x)^c}}.$

(b) On effectue une intégration par parties. On pose

$$\begin{cases} u'(t) &= \frac{(x-t)^n}{(x-t)^{n+1}} \\ u(t) &= -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v'(t) &= -\frac{(-c-n-1)}{(1-t)^{c+n+2}} \\ v(t) &= \frac{1}{(1-t)^{c+n+1}} = (1-t)^{-c-n-1} \end{cases}$$

Les fonctions u et v ainsi définies sont de classe C^1 sur $\mathbf{R}^+$, donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{(1-t)^{c+n+1}} \right]_0^x - \int_0^x -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \times \left(\frac{(-c-n-1)}{(1-t)^{c+n+2}} \right) dx \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{c+n+1}{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(1-t)^{c+n+2}} = \boxed{\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{c+n+1}{n+1} I_{n+1}} \end{aligned}$$

(c) On raisonne par récurrence.

Initialisation :

Pour $n = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^n \binom{c+k-1}{k} x^{k+c} \binom{c+n}{n} I_n = \sum_{k=0}^0 \binom{c+k-1}{k} x^{k+c} \binom{c}{0} I_0 = 1+c \left(-\frac{1}{c} - \frac{1}{c(1-x)^c} \right) = 1-1+\frac{1}{(1-x)^c}$$

Hérédité :

Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose que $\sum_{k=0}^n \binom{c+k-1}{k} x^{k+c} \binom{c+n}{n} I_n = \frac{1}{(1-x)^c}.$

D'après cette hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(1-x)^c} &= \sum_{k=0}^n \binom{c+k-1}{k} x^k + c \binom{c+n}{n} I_n \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{c+k-1}{k} x^k + c \binom{c+n}{n} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{c+n+1}{n+1} I_{n+1} \right) \quad \text{d'après 1.b} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{c+k-1}{k} x^k + c \binom{c+n}{n} \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \binom{c+n}{n} \frac{c+n+1}{n+1} I_{n+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{c+k-1}{k} x^k + c \binom{c+n+1}{n+1} I_{n+1}
 \end{aligned}$$

L'hérédité est donc vérifiée.

Conclusion :

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^n \binom{c+k-1}{k} x^k + c \binom{c+n}{n} I_n$.
--