

EXERCICE 1

Dans chaque cas vérifier si la matrice est bien une matrice de transition et si oui tracer le graphe probabiliste associé.

$$\begin{array}{l}
 1. \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 2. \begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 & 1/2 & 1 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 3. \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{l}
 4. \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 5. \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 6. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

EXERCICE 2 — Matrice identité

La matrice I_r avec r un entier naturel non nul est elle une matrice de transition ? Quel est le graphe probabiliste associé ?

EXERCICE 3 — État stable

Calculer les états stables des chaînes de Markov dont les matrices de transition sont celles de l'exercice .

EXERCICE 4

On appelle **vecteur de probabilité** une matrice ligne $p = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n)$ dont tous les coefficients sont positifs et dont la somme des coefficients vaut 1.

1. Formaliser cette définition.
2. Montrer que si p est un vecteur de probabilité alors tous ces coefficients sont inférieurs ou égal à 1. Peut on avoir un coefficient égal à 1 ?
3. Soit M une matrice de transition. Montrer que pM est un vecteur de probabilité.

EXERCICE 5 — Chaînes de Markov à deux états

Soit p et q deux réels de $[0; 1]$. On note $A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$

1. Vérifier que la matrice précédente est une matrice de transition et tracer le graphe associé.
2. **Cas particuliers**
 - (a) Que se passe-t-il si $p = q = 1$? Que fait la chaîne de Markov ? Quels sont les états stables.

(b) On suppose ici $q \in]0, 1[$ et $p = 1$.

- i. Quels sont les états stables de la chaîne ?
- ii. Établir une relation de récurrence vérifiées par la suite $(P(X_n = 1))_{n \in \mathbb{N}}$.
- iii. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de $P(X_n = 1)$ en fonction de $P(X_0 = 1)$.
- iv. La chaîne de Markov est-elle convergente ?

On suppose dans la suite que $p \in]0; 1[$ et $q \in]0; 1[$

3. Déterminer alors le spectre de A . Montrer que l'état stable de la chaîne est

$$\Pi = \left(\frac{q}{p+q} \quad \frac{p}{p+q} \right).$$

4. (a) Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si

$$\lambda^2 - (2 - (p+q))\lambda + (1-p)(1-q) - pq = 0$$

(b) On note $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}$. Calculer PQ et en déduire que P est inversible et l'expression de P^{-1}

(c) Calculer $D = PAP^{-1}$.

(d) Montrer que $A^n = P^{-1}D^nP$ et en déduire une expression de A^n .

(e) En reprenant les notations du cours calculer une expression de U_n l'état n en fonction de n , α et β et de U_0 l'état initial.

(f) calculer la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$.

5. **Autre démonstration** Montrer que la suite $(P(X_n = 1))$ est arithmético-géométrique. Conclure.

EXERCICE 6

Une personne commande son dîner en ligne une fois par semaine, sur trois plateformes différentes numérotées de 1 à 3 de manière aléatoire selon le protocole suivant :

- La première semaine, chaque plateforme a la même probabilité d'être choisie ;
- La plateforme 1 étant la meilleure mais la plus chère, elle ne commande jamais deux fois de suite sur celle-ci ;
- Si elle commande une certaine semaine via la plateforme 1, elle commandera la semaine suivante sur 2 ou 3 avec autant de chance ;
- Si elle commande une certaine semaine via 2 ou 3, il y a une chance sur deux qu'elle change de plateforme la semaine suivante et dans ce cas, autant de chance de choisir une des deux autres.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, X_n la variable aléatoire qui prend pour valeur le numéro de la plateforme choisie lors de la n -ième commande. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, V_n le n -ième état probabiliste de la chaîne, c'est à dire le vecteur ligne de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ défini par $V_n = (P(X_n = 1) \ P(X_n = 2) \ P(X_n = 3))$.

- (a) Quelle est la loi de X_1 ? Préciser son espérance et sa variance.
(b) Proposer une instruction Python permettant de simuler X_1 .
- Représenter le graphe ainsi que la matrice de transition A associés à la chaîne (X_n) .
- Justifier soigneusement, en citant les résultats utilisés, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$V_{n+1} = V_n A$$

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $V_n = V_1 A^{n-1}$.
- (a) Vérifier que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^t A$. On précisera la valeur propre associée.
(b) Les commandes

```
1 import numpy as np
2 import numpy.linalg as al
3
4 A=np.array([[0,1/2,1/2],[1/4,1/2,1/4],[1/4,1/4,1/2]])
5 B=A.transpose()
6 C=16*al.matrix_power(B,2)-np.eye(3)
7 print(np.dot(C, B-np.eye(3)))
```

renvoient

```
1 >>>
2 array([[0., 0., 0.],
3 [0., 0., 0.],
4 [0., 0., 0.]])
```

En déduire deux autres valeurs propres possibles de ${}^t A$.

- Vérifier que les deux valeurs précédentes sont bien valeurs propres de ${}^t A$, puis exhiber, en rédigeant soigneusement, une matrice D diagonale (dont les éléments diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant) et une matrice P inversible telles que

$${}^t A = P D P^{-1}$$

- Inverser P .
- Calculer explicitement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice $({}^t A)^n$ puis A^n et en déduire la loi de X_n .
- Conclure que (X_n) converge en loi vers une variable Z que l'on explicitera. Établir un lien avec le vecteur V .

EXERCICE 7

On considère la matrice M définie par :

$$M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) La matrice M est-elle inversible ?
(b) Montrer que M admet trois valeurs propres $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ que l'on précisera. Expliciter trois vecteurs U_1, U_2, U_3 tels que, pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, $E_{\lambda_i}(M) = \text{Vect}(U_i)$.
(c) Justifier que la famille (U_1, U_2, U_3) forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
(d) Déterminer les coordonnées (α, β, γ) , dans la base (U_1, U_2, U_3) , du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne.
- si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout entier i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i) l'événement "on obtient une boule blanche (respectivement une boule rouge) lors du $i^{\text{ème}}$ tirage". Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage et on pose $X_0 = 2$. On admet que (X_n) est une chaîne de Markov à 3 états (notés ici 0, 1 et 2) et on note V_n son n -ième état probabiliste.

On note enfin T_1 le numéro du tirage où l'on extrait pour la première fois une boule blanche et T_2 le numéro du tirage où l'on extrait la dernière boule blanche.

- (a) Représenter le graphe probabiliste auquel la chaîne (X_n) est associée et préciser la matrice de transition A de celui-ci. Exprimer A en fonction de M .
(b) Justifier rigoureusement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} = V_n A$.
(c) Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$V_n = \alpha {}^t U_1 + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^n {}^t U_2 + \gamma \left(\frac{1}{3}\right)^n {}^t U_3$$

où α, β, γ sont les réels trouvés à la Question (1d).

- Donner la loi de la variable X_n .

- Calculer $E(X_n)$, espérance de X_n , ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
- Reconnaître la loi de T_1 .

5. Écrire les événements $[T_2 = 2]$ et $[T_2 = 3]$ à l'aide de certains des événements B_i et en déduire les valeurs des probabilités $P[T_2 = 2]$ et $P[T_2 = 3]$.
6. (a) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, écrire l'événement $[T_2 = n]$ en fonction des événements $[X_{n-1} = 1]$ et $[X_n = 0]$.
- (b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$P[T_2 = n] = 2 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right]$$

- (c) Montrer que la variable aléatoire T_2 admet une espérance et calculer $E(T_2)$.

EXERCICE 8 — EDHEC 2017

Les sommets d'un carré sont numérotés 1,2,3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.

Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est-à-dire à l'instant 0, le mobile se trouve sur le sommet 1.
- Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant n . D'après les deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$.

1. Donner la loi de X_1 , ainsi que l'espérance de la variable aléatoire X_1 .

On admet pour la suite que la loi de X_2 est donnée par

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{3} \quad P(X_2 = 2) = P(X_2 = 3) = P(X_2 = 4) = \frac{2}{9}$$

2. Pour tout entier supérieur ou égal à 2, donner, en justifiant, l'ensemble des valeurs prises par X_n .
3. (a) Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3} (P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)).$$

- (b) Vérifier que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.
- (c) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1$ et en déduire l'égalité, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}$$

- (d) Établir alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X_n = 1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

4. (a) En procédant comme à la question précédente, montrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3} (P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)).$$

- (b) En déduire une relation entre $P(X_{n+1} = 2)$ et $P(X_n = 2)$.

- (c) Montrer enfin que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X_n = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

5. On admet enfin que pour tout entier naturel n , on a

$$P(X_{n+1} = 3) = -\frac{1}{3}P(X_n = 3) + \frac{1}{3}; \quad \text{et} \quad P(X_{n+1} = 4) = -\frac{1}{3}P(X_n = 4) + \frac{1}{3}.$$

En déduire sans calcul que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

6. Déterminer, pour tout entier naturel n , l'espérance $E(X_n)$ de la variable aléatoire X_n .
7. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la matrice ligne de $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$

$$U_n = (P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3) \quad P(X_n = 4))$$

- (a) Montrer, grâce à certains résultats obtenus ci-avant, que, si l'on pose

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1} = U_n A$$

- (b) Établir par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 A^n$.

- (c) En déduire la première ligne de A^n .

8. Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres lignes de la matrice A^n , puis écrire ces trois lignes.

EXERCICE 9 — D'après HEC 2003

On dispose de deux jetons A et B que l'on peut placer dans deux cases C_1 et C_2 , et d'un dispositif permettant de tirer au hasard et de manière équiprobable, l'une des lettres a, b ou c . Au début de l'expérience, les deux jetons sont placés dans C_1 . On procède alors à une série de tirages indépendants de l'une des trois lettres a, b ou c .

À la suite de chaque tirage, on effectue l'opération suivante

- Si on tire la lettre a , on change le jeton A de case ;
- Si on tire la lettre b , on change le jeton B de case ;
- Si on tire la lettre c , les positions des deux jetons restent inchangées.

Partie I - Étude du mouvement du jeton A On introduit les variables X_n (respectivement Y_n) qui valent 1 si à l'issue de la n -ième expérience, le jeton A (resp. le jeton B) est dans la case C_1 et 2 si il est dans la case C_2 .

Naturellement, $X_0 = Y_0 = 1$.

1. On introduit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Justifier que M est diagonalisable.

- (b) Déterminer les valeurs propres de M et une matrice $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.
 - (c) En déduire l'expression de M^n , pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. (a) Déterminer la loi de X_1 .
 - (b) À l'aide d'un système complet d'événements à préciser, déterminer ensuite une matrice Q telle que

$$(P(X_{n+1} = 0) \quad P(X_{n+1} = 1)) = (P(X_n = 0) \quad P(X_n = 1)) Q$$

- (c) Expliciter Q^n , pour $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (d) En déduire la loi de X_n .
- (2) Partie II - Étude du mouvement du couple de jetons (A, B)

On considère maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire W_n définie par $W_0 = 1$ et, à l'issue de la n -ième expérience décrite précédemment :

- Si A et B sont tous deux dans C_1 , alors $W_n = 1$;
- Si A se trouve dans C_1 et B dans C_2 , alors $W_n = 2$;
- Si A se trouve dans C_2 et B dans C_1 , alors $W_n = 3$;
- Si A et B sont tous deux dans C_2 , $W_n = 4$.

1. Déterminer la loi de W_1 .
2. On admet que (W_n) est une chaîne de Markov à 4 états et on note V_n son n -ième état probabiliste. Représenter le graphe et la matrice de transition A auxquels elle est associée. On a notamment, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$V_{n+1} = V_n A$$

3. Montrer que 1 est valeur propre de ${}^t A$. Déterminer un vecteur propre de ${}^t A$, associé à la valeur propre 1 dont la somme des composantes est égale à 1 .
4. Compléter la fonction Python pour qu'elle renvoie une simulation de W_n

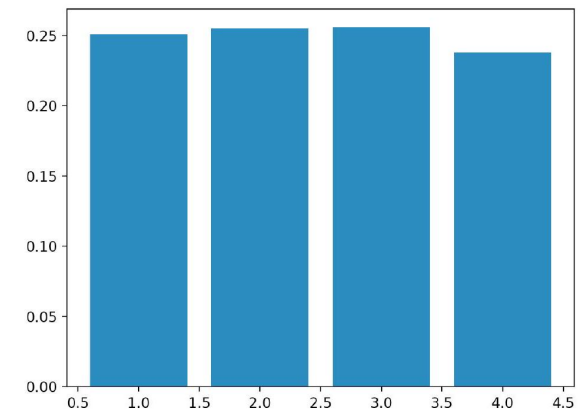
```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_W(n):
    A=np.array(...)
    w=0
    n=len(A)
    for m in range(k):
        r=rd.random()
        i=w
        p=0
        for j in range(n):
            if p<=r and r<p+A[i,j]:
                w=...
                p=p+A[i,j]

    return(w+1)
```

5. On écrit le script suivant dont les résultats d'exécution sont affichés ci-dessous

```
import matplotlib.pyplot as plt
S=np.zeros(4)
for m in range(1000):
    j=simul_W(100)
    S[j-1]+=1
S=[S[i]/1000 for i in range(4)]
plt.bar([1,2,3,4],S)
plt.show()
```



Interpréter ce résultat. Quel est le lien avec la Question (2c) ?