

Probabilités discrètes

. Exercice n°1

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q .

Ainsi, on a : $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ et $p + q = 1$.

Partie I : Tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.

On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Reconnaître la loi de T . Pour tout entier $k \geq 1$, donner $P(T = k)$ et rappeler l'espérance et la variance de T .
2. En déduire que U admet une espérance et une variance. Déterminer $E(U)$ et $V(U)$.

Partie II : Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

On note Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.

Ainsi, on peut remarquer que la probabilité de l'événement $(Y = 1) \cup (Z = 1)$ est égale à 1.

Pour tout entier naturel non nul i , on note :

B_i l'événement "la i -ème boule tirée est blanche",

N_i l'événement "la i -ème boule tirée est noire".

3. (a) Montrer, pour tout entier $k \geq 2$: $P(X = k) = q p^{k-1} + p q^{k-1}$.

(b) Vérifier :
$$\sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) = 1$$

(c) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que : $E(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

4. (a) Pour tout entier $k \geq 2$, déterminer $P((X = k) \cap (Y = 1))$
(On distinguera les cas $k = 2$ et $k \geq 3$.)

(b) En déduire : $P(Y = 1) = q(1 + p)$.

(c) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y .

On admet que l'espérance de Y existe et que : $E(Y) = \frac{1}{q}(1 - p + p^2)$.

5. Donner la loi de Z et son espérance.
6. Montrer que les variables aléatoires Y , Z et $X - 1$ sont égales.
7. Montrer que le couple (Y, Z) admet une covariance et exprimer $\text{cov}(Y, Z)$ à l'aide de $E(X)$, $E(Y)$ et $E(Z)$.

. Exercice n°2

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 , de six boules numérotées de 1 à 6 ainsi que d'un dé équilibré. Initialement, l'urne U_1 contient les boules 1 et 2 ; alors que l'urne U_2 contient les boules 3,4,5,6.

On note $\mathcal{E}$ l'expérience consistant à lancer une fois le dé et à changer d'urne la boule portant le numéro obtenu avec le dé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1 après n répétitions de $\mathcal{E}$.

1. Les cinq premiers lancers du dé donnent : 1,3,2,3,5. Quel est le contenu de U_1 à l'issue des 5 expériences $\mathcal{E}$ ainsi réalisées ?
2. Quelle est la loi de X_1 ? Calculer son espérance.
3. (a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) .
(b) En déduire la loi de X_2 .
(c) Calculer $\text{Cov}(X_1, X_2)$.
4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
 - $\mathbb{P}([X_{n+1} = 0]) = \frac{1}{6}\mathbb{P}([X_n = 1])$
 - $\forall k \in [1; 5],$
$$\mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = \frac{7-k}{6}\mathbb{P}([X_n = k-1]) + \frac{k+1}{6}\mathbb{P}([X_n = k+1])$$
 - $\mathbb{P}([X_{n+1} = 6]) = \frac{1}{6}\mathbb{P}([X_n = 5]).$(b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(X_{n+1}) = \frac{2}{3}\mathbb{E}(X_n) + 1$.
(c) Calculer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(X_n)$. Donner alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n)$ et interpréter le résultat obtenu.
5. Écrire une fonction Python prenant en argument d'entrée un entier naturel non nul n et renvoyant une réalisation de X_n .
6. En déduire un programme Python demandant une valeur de n à l'utilisateur et permettant d'obtenir un histogramme approchant la loi de probabilité de X_n .

. Exercice n°3

Les deux parties sont indépendantes.

Partie I

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.

On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée de l'opération des clients C_1, C_2, C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre $p, p \in]0; 1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.

On note A l'événement : « C_3 termine en dernier son opération ».

Ainsi l'événement A est égal à l'événement : $(\min(X_1, X_2) + X_3) > \max(X_1, X_2)$. On se propose de calculer la probabilité de A .

1. Rappeler la loi de X_1 ainsi que son espérance $E(X_1)$ et sa variance $V(X_1)$. On définit la variable aléatoire Δ par $\Delta = |X_1 - X_2|$.
2. Calculer la probabilité $P(\Delta = 0)$.
3. Soit n un entier naturel non nul.
 - (a) Justifier : $P(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k) P(X_1 = n + k)$
 - (b) En déduire : $P(\Delta = n) = 2 \frac{pq^n}{1+q}$
4. (a) Montrer que Δ admet une espérance $E(\Delta)$ et la calculer.
(b) Montrer : $E((X_1 - X_2)^2) = 2V(X_1)$. En déduire que Δ admet une variance $V(\Delta)$ et la calculer.
5. Montrer que l'événement A est égal à l'événement $(X_3 > \Delta)$.

6. (a) En déduire : $P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\Delta = k) P(X_3 > k)$
- (b) Exprimer $P(A)$ à l'aide de p et q .

Partie II

Dans cette partie, X est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p , $p \in]0; 1[$ et Y est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ , $\lambda \in]0; +\infty[$.

On note $q = 1 - p$.

On suppose que X et Y sont indépendantes, c'est à dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0; +\infty[, \quad P(X = k \cap Y \leq t) = P(X = k) P(Y \leq t)$$

1. Rappeler une densité de Y ainsi que son espérance et sa variance.

2. On définit la variable aléatoire Z par $Z = \frac{Y}{X}$.

(a) Montrer : $\forall t \in [0; +\infty[, \quad P(Z \geq t) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) P(Y \geq tk)$

(b) En déduire : $\forall t \in [0; +\infty[, \quad P(Z \geq t) = \frac{pe^{-\lambda t}}{1 - qe^{-\lambda t}}$

- (c) Montrer que la variable aléatoire Z admet une densité et déterminer une densité de Z .