

Algèbre linéaire

. Exercice n°1

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2 et on note $\mathcal{B}$ la base (e_0, e_1, e_2) de E , où pour tout réel x , on a : $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$.

On considère l'application, notée f , qui à toute fonction polynômiale P appartenant à E , associe la fonction polynômiale $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f(P))(x) = 2xP(x) - (x^2 - 1)P'(x).$$

- Montrer que f est une application linéaire.
 - En écrivant, pour tout réel x , $P(x) = a + bx + cx^2$, définir explicitement $(f(P))(x)$ puis en déduire que f est un endomorphisme de E .
 - Ecrire $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ comme des combinaisons linéaires de e_0 , e_1 et e_2 , puis en déduire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
- Vérifier que $\text{Im } f = \text{vect}(e_1, e_0 + e_2)$ et donner la dimension de $\text{Im } f$.
 - Déterminer $\text{Ker } f$.
- A l'aide de la méthode du pivot de Gauss, déterminer les valeurs propres de A .
 - En déduire que f est diagonalisable et donner les sous-espaces propres de f .
 - Vérifier que les sous-espaces propres de f , autres que $\text{Ker } f$, sont inclus dans $\text{Im } f$.

. Exercice n°2

On dit qu'une matrice A carrée d'ordre n est une matrice nilpotente s'il existe un entier naturel k non nul tel que

$$A^{k-1} \neq 0_n \text{ et } A^k = 0_n$$

où 0_n représente la matrice carrée nulle d'ordre n .

Soit A une matrice carrée d'ordre n , on dit que le couple (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A lorsque :

$$\begin{cases} \Delta \text{ est une matrice diagonalisable} \\ N \text{ est une matrice nilpotente} \\ \Delta N = N\Delta \text{ et } A = N + \Delta \end{cases}$$

- On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A .

Dans toute la suite de l'exercice, on pose

$$: A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer les valeurs propres de A .
 - La matrice A est-elle diagonalisable ?
- On considère les matrices colonnes

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Calculer les produits ΔX_1 , ΔX_2 et ΔX_3
 - (b) Justifier que la matrice Δ est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible telle que : $P^{-1}\Delta P = D$.
 - (c) Calculer P^{-1} .
- 4.
- (a) Etablir que N est une matrice nilpotente.
 - (b) Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de la matrice A .
 - (c) En utilisant la formule du binôme de Newton que l'on justifiera, donner l'expression de A^n en fonction des puissances de Δ , de N et de n .
 - (d) Etablir que : Pour tout entier naturel $k \geq 1$, $\Delta^k N = N$
 - (e) Proposer une décomposition de Dunford de A^n .