

. Exercice n°1

Dans cet exercice on pourra utiliser l'encadrement suivant : $2 < e < 3$.

Partie I : Etude d'une fonction

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \varphi(x) = x^2 e^x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de φ , en précisant la limite de φ en $-\infty$, sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$.
2. Etablir que l'équation $e^x = \frac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α , et que α appartient à l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[$.

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = x^3 e^x$,
et la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie II : Etude d'une suite

3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.
4. Etablir que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
5. Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

Partie III : Etude d'une série

6. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{f(n)}$ converge. On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)}$.
7. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| S - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}$.
8. En déduire une fonction en Scilab qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Partie IV : Etude d'une fonction de deux variables

On considère l'ouvert $U =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et l'application de classe $\mathcal{C}^2$ suivante :

$$g : U \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto g(x, y) = \frac{1}{x} + e^x - y^2 e^y$$

9. Représenter graphiquement l'ensemble U .
10. Calculer, pour tout (x, y) de U , les dérivées partielles premières de g en (x, y) .
11. Montrer que g admet deux points critiques et deux seulement, et que ceux-ci sont $(\alpha, 0)$ et $(\alpha, -2)$, où α est le réel défini à la question 2.
12. Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha, 0)$?
13. Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha, -2)$?
14. Est-ce que g admet un extremum global sur U ?

. Exercice n°2

Partie I- Calcul d'une intégrale dépendant d'un paramètre

On considère l'application $g : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0; 1]$, par :

$$g(t) = \begin{cases} -t \ln(t) & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur $[0; 1]$.
2. A l'aide d'une intégration par parties, calculer, pour tout $x \in]0; 1[$, l'intégrale $\int_x^1 g(t)dt$.
3. En déduire que l'intégrale $\int_0^1 g(t)dt$ converge et que : $\int_0^1 g(t)dt = \frac{1}{4}$.

Partie II- Exemple de densité

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} -t \ln t + t^{1/3} & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Montrer que f est continue sur $] -\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.
Est-ce que f est continue en 1 ?
5. Etablir que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.
6. Montrer que f est une densité.
7. (a) Montrer que f est de classe C^2 sur $]0; 1[$ et calculer $f'(t)$ et $f''(t)$ pour tout $t \in]0; 1[$.
(b) En déduire que l'équation $f'(t) = 0$ d'inconnue $t \in]0; 1[$, admet une solution et une seule, notée α , et montrer : $\frac{1}{e} < \alpha < 1$.
(c) Ecrire un programme en Python qui calcule et affiche une valeur approchée de α à 10^{-3} près, mettant en œuvre l'algorithme de dichotomie.

Partie III- Calcul d'une fonction de répartition

On admet qu'il existe une variable aléatoire X ayant f pour densité (l'application f a été définie au début de la partie II) et on note F la fonction de répartition de X .

8. Calculer, pour tout $x \in]0; 1[$, l'intégrale $\int_x^1 f(t)dt$.
(On pourra utiliser le résultat obtenu à la question I.2.)
9. Calculer $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
10. Tracer l'allure de la courbe représentative de F .

Partie IV- Etude d'extremum local pour une fonction de deux variables réelles

On note D l'ensemble des couples (x, y) appartenant à $]0; +\infty[^2$ tels que : $x + y < 1$ et $2x < 1$.
On considère l'application $G : D \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 sur l'ouvert D , définie, pour tout $(x, y) \in D$, par :

$$G(x, y) = f(x + y) - \frac{1}{2}f(2x)$$

11. Représenter l'ensemble D .
12. Calculer, pour tout $(x, y) \in D$, les dérivées partielles premières de G en (x, y) , en fonction de x, y, f' .
13. Soit $(x, y) \in D$. Montrer que (x, y) est un point critique de G si et seulement si :

$$f'(2x) = 0 \text{ et } f'(x + y) = 0$$

14. En déduire que G admet un point critique et un seul, et qu'il s'agit de $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)$, le réel α ayant été défini en 7b.
15. Est-ce que G admet un extremum local ?

. Exercice n°3

Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.
 - (a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - (b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$ et dresser son tableau de variations.
 - (c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = f(n)$.
 - (d) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - (e) Écrire une fonction d'en-tête : `def u(n):` qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n .
2.
 - (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
 - (b) Montrer que pour tout réel x positif : $\ln(1+x) \leq x$. En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
 - (c) Donner le développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0. En déduire que : $v_{n+1} - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.
 - (d) Déterminer la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. On note $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.
 - (e) Pour $n \geq 2$, simplifier la somme partielle : $\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ converge vers γ .
3.
 - (a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.
 - (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \leq \gamma \leq u_n$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}$.
 - (c) On rappelle que l'instruction `np.floor(x)` renvoie la partie entière d'un réel x et on suppose que la fonction `u` de la question 1) e : a été correctement programmée. Expliquer l'intérêt et le fonctionnement du script ci-dessous :

```
eps=input('Entrer un réel strictement positif : ')\n n=np.floor(1/eps)+1\n print(u(n))
```

Partie II : Étude d'une série

Pour tout entier naturel n , on pose $a_n = \frac{1}{n(2n-1)}$.

1. Démontrer que la série de terme général a_n converge.
2.
 - (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$.
 - (b) Déterminer deux réels α et β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1}$.
 - (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.
3.
 - (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$ où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite définie dans la partie I.
 - (b) Calculer alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.
4.
 - (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$.
 - (b) Retrouver alors le résultat de la question 3) b :