

Fonction génératrice des probabilités

On prendra comme convention : $0^0 = 1$. Les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

I. Cas discret fini à valeurs entières

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans cette partie toutes les variables aléatoires considérées sont à support dans $\llbracket 0; n \rrbracket$.

Définition 1.1

La fonction génératrice des probabilités de X , notée G_X , est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \sum_{i=0}^n t^i \mathbb{P}([X = i])$$

Remarques :

R1 – La somme étant finie G_X est bien définie sur $\mathbb{R}$.

R2 – G_X est une fonction polynômiale dont les coefficients sont donnés par la loi de X .

Proposition 1.2

1. La fonction G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$

3.

$$G_X(1) = 1; \quad G'_X(1) = \mathbb{E}(X); \quad G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1))$$

4. Si X et Y sont indépendantes, alors : $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$.

5. Pour tout $k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X = k]) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$

Remarques :

R1 – D'après le dernier point, la fonction génératrice caractérise donc la loi.

R2 – Ainsi, d'après la formule de Koenig-Huygens $\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$

R3 – Le point numéro 4 peut se généraliser : Soit $(X_1, \dots, X_n)$ des v.a. mutuellement indépendantes $G_{X_1+\dots+X_n} = \prod_{i=1}^n G_{X_i}$.

Exercice 1

Calculer la fonction génératrices des moments dans le cas où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ puis $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

II. Cas discret infini à valeurs entières

Dans cette partie toutes les variables aléatoires considérées sont à support dans $\mathbb{N}$.

Proposition 2.1

Pour tout $t \in [-1; 1]$, la série $\sum_{i \geq 0} t^i \mathbb{P}([X = i])$ est convergente.

Démonstration.

□

Définition 2.2

Supposons que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

La fonction génératrice des probabilités de X , notée G_X , est la fonction définie sur $[0 - 1; 1]$ par :

$$\forall t \in [-1; 1], \quad G_X(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} t^i \mathbb{P}([X = i])$$

On admet ensuite que les propriétés vues dans le cas discret se généralisent. Pour démontrer ces propriétés, il faudrait que l'on soit capables de dériver sous le signe $\sum_{i=0}^{+\infty}$, ce qui n'est pas le cas en ECG...

Proposition 2.3

Avec les notations précédentes :

1. La fonction G_x est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$
2. $\forall t \in \mathbb{R}, G_x(t) = \mathbb{E}(t^x)$
- 3.

$$G_X(1) = 1; \quad G'_X(1) = \mathbb{E}(X); \quad G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1))$$

4. Si X et Y sont indépendantes, alors : $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$.

5. Pour tout $k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X = k]) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$

Retenir

La fonction génératrice caractérise donc la loi.

Exercice 2

Calculer la fonction génératrices des moments dans les cas suivants

1. $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$
2. $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

Exercice 3

Soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$. Montrer que si X et Y sont indépendantes, alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.