Composite

E C G

DS n°7

**Option Économique**

# MATHÉMATIQUES

**16 Mars 2026**

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à* ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute* ***calculatrice*** *et de tout matériel électronique est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
*Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

---

## Exercice n°1

### Partie I : Étude de la fonction $f$

1. Sur $]0;+\infty[$ , $t \mapsto t$ , $t \mapsto \ln(t)$ sont de classe $C^{\infty}$, donc les produits $t \mapsto t^2$ , $t \mapsto t\ln(t)$ sont de classe $C^{\infty}$ , leur différence $t \mapsto t^2 - t\ln(t)$ est de classe $C^{\infty}$ .
   On en déduit que $f$est de classe $C^{\infty}$ sur $]0;+\infty[$ . D'autre part par croissances comparées $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln(t) = 0 = f(0)$ donc $\lim\limits_{t\to 0^+} t^2 - t\ln(t) = 0$ .
   $\boxed{f \text{ est continue sur } [0;+\infty[}$.
2. $f$ est classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$ et pour tout $t \in ]0;+\infty[$,
   $f(t) = t^2 - t\ln(t)$ , $f'(t) = 2t - \ln(t) - 1$ , $f''(t) = 2 - \dfrac{1}{t}$.
3. Pour $t > 0$ , $f(t) = t^2 - t\ln(t) = t^2\left(1 - \dfrac{\ln(t)}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^2 \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ; $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln(2) > 0$ ;
   $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1+2\ln(2)}{4}$

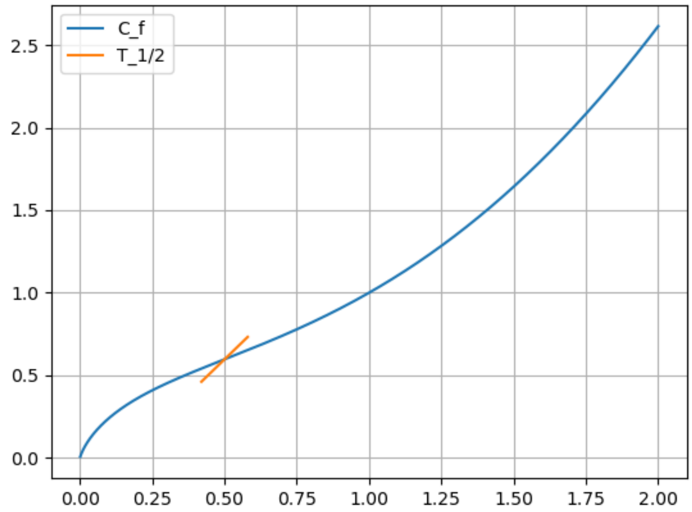
| $t$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe $\left(f''(t)\right)$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(t)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\ln(2)$ | $\nearrow$ | |
| signe $\left(f'(t)\right)$ | $\Vert$ | | $+$ | | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\dfrac{1+2\ln(2)}{4}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

4. On note $C$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{i})$.

(a) Pour $t>0$, $\dfrac{f(t)-f(0)}{t}=\dfrac{t^2-t\ln(t)-0}{t}=t-\ln(t)\underset{t\to 0^+}{\longrightarrow}+\infty$, donc $f$ n'est pas dérivable en 0 et $C$ admet $(Oy)$ comme demi tangente en $O$.

(b) $f''$ s'annule en changeant de signe uniquement en $\dfrac{1}{2}$, donc $C$ admet un point d'inflexion et un seul, $I$ de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1+2\ln(2)}{4}\right)$.

(c) Tracer de $C$.




5. La fonction $f$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, et $f(1)=1-\ln(1)=1$ donc $\boxed{\text{l'équation } f(t)=1\text{, d'inconnue } t\in[0;+\infty[\text{, admet 1 pour unique solution}}$.

## Partie II : Étude d'une fonction $F$ de deux variables réelles

$F:]0;+\infty[^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, définie, pour tout $(x,y)$ de $]0;+\infty[^2$, par $F(x,y)=x\ln(y)-y\ln(x)$

1. (a) Dérivées partielles premières de $F$.

$$\boxed{\forall(x;y)\in]0;+\infty[^2,\ p=\partial_1F(x;y)=\ln(y)-\frac{y}{x}\ ;\ q=\partial_2F(x;y)=\frac{x}{y}-\ln(x)}$$

(b) Soit $(x,y)\in]0;+\infty[^2$.

« $(x,y)$ est un point critique de $F$ » $\iff$ « $p=q=0$ » $\iff\begin{cases}\ln(y)-\dfrac{y}{x}&=&0\\ \dfrac{x}{y}-\ln(x)&=&0\end{cases}\iff$

$$\begin{cases}\ln(y)-\dfrac{y}{x}&=&0\\ x/y&>&0\\ \dfrac{x}{y}&=&\ln(x)\end{cases}\iff\begin{cases}\ln(\dfrac{x}{\ln(x)})-\dfrac{1}{\ln(x)}&=&0\\ x/y&>&0\\ \dfrac{x}{\ln(x)}&=&y\end{cases}\iff\begin{cases}\ln(x)-\ln(\ln(x))-\dfrac{1}{\ln(x)}&=&0\\ \ln(x)&>&0\\ \dfrac{x}{\ln(x)}&=&y\end{cases}$$

$$\underset{L_1\leftarrow\ln(x)L_1}{\iff}\begin{cases}f(\ln(x))&=&1\\ x&>&1\\ \dfrac{x}{\ln(x)}&=&y\end{cases}$$

(c) De Partie I 5) et Partie II 1.(b) on a « $(x,y)$ est un point critique de $F$ » $\iff$

$$\begin{cases}\ln(x)&=&1\\ x&>&1\\ \dfrac{x}{\ln(x)}&=&y\end{cases}\iff\begin{cases}x&=&e\\ x&>&1\\ \dfrac{e}{\ln(e)}&=&y\end{cases}\iff(x;y)=(e;e)$$

$\boxed{(e;e)\text{ est l'unique point critique de } F}$.

2. Calcul des dérivées partielles seconde de $F$ .
Soit $(x, y) \in ]0; +\infty[^2$.
$\partial_1^2 F(x;y) = \dfrac{y}{x^2} > 0$ , $\partial_2\partial_1 F(x;y) = \partial_1\partial_2 F(x;y) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}$ , $\partial_2^2 F(x;y) = -\dfrac{x}{y^2}$ et pour $(x;y) = (e;e)$ la matrice Hessienne est :
$$H\begin{pmatrix} 1/e & 0 \\ 0 & -1/e \end{pmatrix}$$
Ainsi la matrice hessienne possède propres de signes contraires c'est à dire que $\boxed{F \text{ n'a pas d' extremum local en } (e;e}$

### Partie III : Étude d'une suite récurrente

$\boxed{u_0 = \dfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)}$.

1. La fonction $f$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ , de plus $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1 + 2\ln(2)}{4} \geqslant \dfrac{1 + 2 \times 0,69}{4} > \dfrac{1}{2}$ et $f(1) = 1$.
On a $u_0 = \dfrac{1}{2}$ donc $u_0 \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$ . Si pour un entier $n$ , $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$, de la croissance de $f$ sur $\left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$ , on a $\dfrac{1}{2} \leqslant f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) = u_{n+1} \leqslant f(1) = 1$ c'est à dire que $u_{n+1} \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]}$.
2. On a $u_0 = \dfrac{1}{2}$ , $u_1 \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$ donc $u_0 \leqslant u_1$ . Si pour un entier naturel $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$ de la croissance de $f$ sur $[0; +\infty[$ et $f \geqslant 0$ on déduit que $0 \leqslant f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$ c'est à dire que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$ .
donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$.
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$ croissante majorée par 1, donc converge vers un réel $L$ avec $L \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$.
De la continuité de $f$ en $L$ (*) on a $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \underset{(*)}{=} f(L)$ or $L = f(L)$ avec $L \geqslant 0$ a pour unique solution $L = 1$ .
$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite croissante de } \left[\dfrac{1}{2}; 1\right] \text{ qui converge vers } 1}$.
4. Programme en Python qui calcule et affiche un entier naturel $N$ tel que $1 - u_N < 10^{-4}$.

```
u=0.5
n=0
whuile 1-u >= 10**(-4):
        n=n+1
        u=u**2-u*np.log(u)

print(n)
```

# Exercice n°2

### Partie I

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la matrice carrée d'ordre $n$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 0 et tous les autres coefficients égaux à 1 :
$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $I_n$ la matrice identité d'ordre $n$.

1. **Étude du cas** $n = 3$.

   Dans cette question, on considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Comme $M$ est symétrique, $M$ est diagonalisable.

   (b) On obtient immédiatement

$$M + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{puis} \quad (M+I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3(M+I).$$

   Il suit que $(M+I)^2 - 3(M+I) = 0$ ou encore $(M+I)(M+I-3I) = 0$ ou encore $(M+I)(M-2I) = 0$. Ainsi, le polynome $P:\ x \mapsto (x+1)(x-2)$ annule $M$.

   (c) Les valeurs propres de $M$ sont à chercher parmi les racines du polynôme annulateur $P$, c'est à dire

$$\mathrm{Sp}(M) \subset \{-1; 2\}.$$

   Vérifions qu'elles sont toutes deux valeurs propres et déterminons en même temps une base de chaque sous-espace propre. (On sait en fait qu'elles le sont ; comme $M$ est diagonalisable elle a au moins une valeur propre, comme elle n'est pas déjà diagonale, son spectre ne peut pas être réduit à un élément).

   - Pour $-1$ :

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(M+I) \quad & \iff \quad x + y + z = 0 \\ & \iff \quad x = -y - z \\ & \iff \quad X = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = -y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

     Ainsi, $-1$ est bien valeur propre (le noyau ci-dessus n'est pas réduit au vecteur nul) et

$$E_{-1}(M) = \mathrm{Ker}(M+I) = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

   - Pour $2$ :

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(M-2I) \quad & \iff \quad \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \\ & \iff \quad \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \\ & \iff \quad x = y = z \\ & \iff \quad X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

     Ainsi, 2 est bien valeur propre (le noyau ci-dessus n'est pas réduit au vecteur nul) et

$$E_2(M) = \mathrm{Ker}(M-2I) = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Dans les questions qui suivent on considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

*On observe que les colonnes sont exactement les vecteurs propres qu'on vient de trouver...*

(d) On peut commencer par dire que, par principe de concaténation, la famille de vecteurs

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

est libre. En effet, il s'agit de la concaténation de deux bases de sous-espaces propres de $M$ associés à des valeurs propres distinctes. Comme est elle constituée de trois vecteurs, c'est donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
La matrice $P$ est donc la matrice de passage vers cette base (depuis la base canonique). Elle est donc inversible.
Le calcul du produit de $P$ avec la matrice donnée donne bien $I$, ce qui conclut la question.
On pouvait naturellement faire un pivot de Gauss simultané.

Dans les questions qui suivent on pose $D = P^{-1}MP$.

(e) Selon qu'on a déjà expliqué que $P$ était la matrice de passage vers une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de $M$ ou non, on peut citer la formule de changement de base ou bien faire le calcul explicite. On trouve

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(f) C'est une récurrence ultra classique et facile.

- <u>initialisation.</u> Pour $k = 0$, on a $M^0 = I = PP^{-1} = PD^0P^{-1}$ et la relation est bien vérifiée.
- <u>hérédité.</u> Supposons que, pour un certain $k \in \mathbb{N}$, on ait $M^k = PD^kP^{-1}$. Alors, comme $D = P^{-1}MP$ donne aussi $M = PDP^{-1}$, on a

$$\begin{aligned} M^{k+1} &= M \cdot M^k \\ &= PDP^{-1} \cdot PD^kP^{-1} && \text{par HR} \\ &= PD \cdot D^kP^{-1} \\ &= PD^{k+1}P^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule au rang $k+1$ et termine la récurrence.

(g) Soit $k$ un entier naturel. On admet qu'il existe des réels $a_k$ et $b_k$ tels que $M^k = a_kM + b_kI$.
On peut alors factoriser par $P$ à gauche et $P^{-1}$ à droite

$$PD^kP^{-1} = M^k = a_kM + b_kI = a_kPDP^{-1} + b_kPP^{-1} = P\left(a_kD + b_kI\right)P^{-1}$$

puis, en multipliant à gauche par $P^{-1}$ et à droite par $P$, on a donc

$$D^k = a_kD + b_kI.$$

$D$ étant diagonale, on peut immédiatement calculer ses puissances

$$D^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} = a_k \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + b_k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_k + b_k & 0 & 0 \\ 0 & -a_k + b_k & 0 \\ 0 & 0 & 2a_k + b_k \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{rcl} -a_k+b_k &=& (-1)^k \\ 2a_k+b_k &=& 2^k \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a_k &=& \dfrac{1}{3}\left(2^k-(-1)^k\right) \\ \\ b_k &=& \dfrac{1}{3}\left(2^k+2(-1)^k\right) \end{array}\right.$$

2. **Cas général : $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2.**
On considère la matrice carrée $J_n$ d'ordre $n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 :

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) On procède par récurrence sur $k$.

- initialisation. Pour $k=1$, on a bien $J_n = n^0 J_n$.
- hérédité. Supposons que, pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, on ait $J_n^k = n^{k-1}J_n$. Comme on a clairement

$$J_n^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & n & \cdots & n \\ n & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & n & n \end{pmatrix} = nJ_n,$$

il suit que

$$\begin{array}{rcll} J_n^{k+1} &=& J_n \cdot J_n^k & \\ &=& J_n \cdot n^{k-1}J_n & \text{par HR} \\ &=& n^{k-1}J^2 = n^{k-1}nJ_n & \\ &=& n^k J_n, & \end{array}$$

ce qui est la formule au rang $k+1$ et termine la récurrence.

(b) Il est clair que $M_n = J_n - I_n$.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $J_n$ et $-I_n$ commutent, on peut appliquer la formule du binôme pour écrire

$$\begin{array}{rcl} {M_n}^k &=& (J_n - I_n)^k \\ &=& \displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}J_n^i(-I_n)^{k-i} = (-1)^k I_n + \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}J_n^i(-I_n)^{k-i} \\ &=& (-1)^k I_n + \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}n^{i-1}(-1)^{k-i}\right)J_n \\ &=& (-1)^k I_n + c_k J_n, \end{array}$$

où on a posé

$$c_k = \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}n^{i-1}(-1)^{k-i}.$$

(d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par la formule du binôme (pour des nombres réels)

$$\begin{aligned}
c_k &= \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1}(-1)^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1}(-1)^{k-i} - \frac{(-1)^k}{n} \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^{i}(-1)^{k-i} - (-1)^k\right) \\
&= \frac{1}{n}\left((n+(-1))^k - (-1)^k\right) \\
&= \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n},
\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

(e) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En dehors de la diagonale, tous les coefficients de $M^k$ sont égaux à $c_k$ donc égaux à

$$\frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}.$$

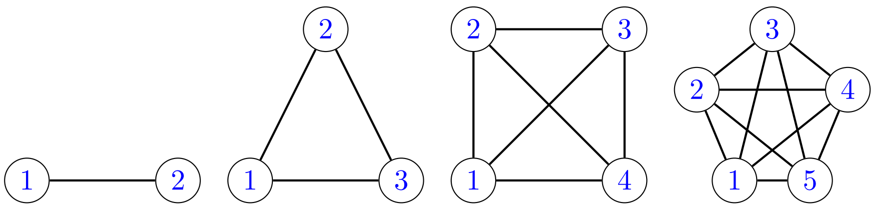
Sur la diagonale, tous les coefficients de $M^k$ sont égaux à $(-1)^k + c_k$ donc

$$\frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} + (-1)^k = \frac{(n-1)^k + (n-1)(-1)^k}{n}.$$

## Partie II

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère un graphe $K_n$ non orienté à $n$ sommets numérotés de 1 à $n$ dans lequel chaque sommet est relié à chaque autre sommet par une arête et n'est pas relié à lui même par une arête.

3. Il s'agit de graphes dits *complets*.




$K_2$ $K_3$ $K_4$ $K_5$

4. (a) La matrice d'adjacence a pour coefficient à la $i-$ème ligne et $j-$ème colonne un 1 ou un 0 selon que les sommets $i$ et $j$ sont reliés par une arête ou non. Il est alors clair que la matrice d'adjacence de $K_n$ est la matrice $M_n$.

   (b) Le nombre de chemins de longueur 4 menant du sommet 1 à lui-même est le coefficient à la première ligne et première colonne de la matrice $M_4^4$.
   D'après la Question (2e), ce coefficient vaut

$$\frac{3^4 + 3(-1)^4}{4} = \frac{84}{4} = 21.$$

5. Dans un graphe non orienté, le degré d'un sommet est le nombre de sommets adjacents à celui-ci. Dans le graphe $K_n$, chaque sommet est adjacent aux $n-1$ autres sommets. Donc le degré de chaque sommet vaut $n-1$.

6. D'après le lemme des poignées de mains, la somme des degrés d'un graphe est égale au double du nombre des arêtes de ce graphe. Notant $\kappa_n$ le nombre d'arêtes de $K_n$, et $s_i$ le sommet numéro $i$, on a donc

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(s_i) = 2\kappa_n \iff \sum_{i=1}^{n} (n-1) = 2\kappa_n \iff \kappa_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

On peut aussi dire qu'il existe une bijection entre l'ensemble des arêtes et l'ensemble des parties à deux éléments de l'ensemble des sommets, dont on connait le cardinal : $\binom{n}{2}$.

## Partie III

Soient $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $K_n$ le graphe défini dans la Partie II. On parcourt les sommets du graphe $K_n$ de la façon suivante :

- Initialement, à l'étape $k = 0$, on se trouve sur le sommet 1.
- À chaque étape, on change de sommet en suivant au hasard, avec équiprobabilité, l'une des arêtes issues du sommet actuel.

Pour tout entier naturel $k$, on note $X_k$ la variable aléatoire égale à la valeur du sommet sur lequel on se trouve à la $k$ème étape (c'est à dire à l'issue du $k-$ème déplacement). En particulier $X_0$ est une variable aléatoire constante égale à 1.

Pour tout entier naturel $k$, on note $V_k$ la matrice ligne de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ définie par

$$V_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 1) & P(X_k = 2) & \cdots & P(X_k = n) \end{pmatrix}.$$

7. La matrice $V_k$ est le $k-$ème état probabiliste de la chaîne de Markov $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Comme $X_0$ est la variable aléatoire constante égale à 1, on a $P(X_0 = 1) = 1$ et, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $P(X_0 = i) = 0$. Ainsi

$$V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Après un déplacement, on peut être sur l'un des $n-1$ sommets numérotés de 2 à $n$ avec équiprobabilité. Ainsi,

$$X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![2, n]\!]).$$

En particulier, $P(X_1 = 1) = 0$ et, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $P(X_1 = i) = \dfrac{1}{n-1}$. Ainsi,

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{n-1} & \cdots & \dfrac{1}{n-1} \end{pmatrix}.$$

8. La matrice de transition de la chaîne est la matrice dont le coefficient situé à la $i-$ème ligne et $k-$ème colonne correspond à la probabilité

$$P_{X_k=i}(X_{k+1} = j).$$

Comme, depuis le sommet $i$, on peut passer à n'importe lequel des autres sommets (y compris le sommet $j$) avec la même probabilité $1/(n-1)$, on a que la matrice de transition de cette chaîne de Markov est

$$A_n = \frac{1}{n-1} M_n,$$

où $M_n$ est la matrice étudiée à la Partie I.

9. (a) Un état-stable de la chaîne est un vecteur propre à gauche associé à la valeur propre 1 de la matrice de transition dont les coefficients sont positifs et dont la somme des coefficients vaut 1 (on l'appelle vecteur *stochastique*). Plus précisément, $\pi = (p_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est un état stable de la chaîne de Markov $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrice de transition $A_n$ si

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ p_i \geq 0, \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \quad \text{et} \quad \pi A_n = \pi.$$

(b) Soit $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$.
Observons d'abord que tous les coefficients de $V$ sont bien positifs et que leur somme fait clairement 1. Ensuite

$$VA_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = V,$$

et $V$ est bien un état stable de la chaîne de Markov $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

10. (a) C'est une conséquence de la formule des probabilités totales (avec le s.c.e $\{[X_k = i] \,:\, i \in [\![1, n]\!]\}$) mais on ne demandait pas de justifier. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$V_{k+1} = V_k A_n = \frac{1}{n-1} V_k M_n.$$

(b) On procède à nouveau par récurrence sur $k$.

- initialisation. Pour $k = 0$. On a $\frac{1}{(n-1)^0} V_0 M_n^0 = V_0$ et c'est vérifié.
- hérédité. Supposons que, pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, on ait $V_k = \frac{1}{(n-1)^k} V_0 {M_n}^k$. Alors

$$\begin{aligned} V_{k+1} &= \frac{1}{n-1} V_k M_n \\ &= \frac{1}{n-1} \frac{1}{(n-1)^k} V_0 {M_n}^k M_n && \text{par HR} \\ &= \frac{1}{(n-1)^{k+1}} V_0 M_n^{k+1}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule au rang $k+1$ et termine la récurrence.

(c) D'après la Question (2e), les coefficients de la matrice $\frac{1}{(n-1)^k} {M_n}^k$ sont

$$\frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n(n-1)^k} = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^{k+1}}{n(n-1)^k}$$

en dehors de la diagonale, et

$$\frac{(n-1)^k + (n-1)(-1)^k}{n(n-1)^k} = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^k}{n(n-1)^{k-1}}$$

sur la diagonale.
Par ce qui précède, $V_k = \frac{1}{(n-1)^k} V_0 {M_n}^k$. D'après ce qu'on a obtenu ci-avant pour $V_0$, $V_k$ est donc la première ligne de la matrice $\frac{1}{(n-1)^k} {M_n}^k$, ainsi

$$V_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 1) & P(X_k = 2) & \cdots & P(X_k = n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} + \frac{(-1)^k}{n(n-1)^{k-1}} & \frac{1}{n} + \frac{(-1)^{k+1}}{n(n-1)^k} & \cdots & \frac{1}{n} + \frac{(-1)^{k+1}}{n(n-1)^k} \end{pmatrix}$$

Observons alors que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$P(X_k = i) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{n}.$$

Ainsi, en notant $Z$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $Z$.

11. On a bien convergence de la chaîne vers l'état stable.

# Exercice n°3

## Partie I

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) La variable $X_n$ compte le nombre de succès lors de la répétition de $n$ expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc $X_n$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/3)$. Il en est de même pour $Y_n$ et $Z_n$.
   (b)
$$P(X_n = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad P(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$
   (c) L'évènement $[(Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)]$ se réalise lorsque, après avoir placé les $n$ premiers jetons, les urnes 2 et 3 n'en contiennent aucun. Tous les jetons sont donc dans l'urne 1, c'est à dire que $[X_n = n]$ s'est réalisé. Ainsi $\boxed{[(Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)] = [X_n = n].}$
   (d) On a clairement
$$V_n = [X_n = 0] \cup [Y_n = 0] \cup [Z_n = 0]$$
   (e) La formule du crible donne
$$\begin{aligned} P(V_n) = & P(X_n = 0) + P(Y_n = 0) + P(Z_n = 0) - P([X_n = 0] \cap [Y_n = 0]) - P([Z_n = 0] \cap [Y_n = 0]) - P([X_n = \\ & + P([X_n = 0] \cap [Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]) \end{aligned}$$
   Les trois urnes ne peuvent pas être simultanément vides après avoir placé $n$ jetons, donc $P([X_n = 0] \cap [Y_n = 0] \cap [Z_n = 0])$, et par ce qui précède (en reproduisant le raisonnement)
   $P\left([X_n = 0] \cap [Y_n = 0]\right) = P\left([Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]\right) = P\left([Z_n = 0] \cap [X_n = 0]\right) = P\left(X_n = n\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
   Il suit que
$$P\left(V_n\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
   comme demandé.

2. On note $V$ l'événement : "Au moins l'une des trois urnes reste toujours vide". On constate qu'on peut écrire
$$V = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$$
   En effet, si au moins une urne reste toujours vide, on a donc la réalisation de $V_n$ pour tout $n$. Or la suite d'évènements $(V_n)$ est décroissante au sens de l'inclusion :
$$V_{n+1} \subset V_n$$
   (si au moins une des urnes est vide après les $n+1$ premiers jetons, elle l'était nécessairement après n'avoir placé que les $n$ premiers). Par le théorème de la limite monotone, on a donc
$$P(V) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n.\right) = \lim_{n \to +\infty} P\left(V_n\right) = 0$$
   car $(2/3)^n \to 0$ et $(1/3)^n \to 0$ également.

3. Soit $T$ la variable aléatoire égale au nombre de jetons nécessaires pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton.

(a) On complète ce programme sans difficulté. On va continuer à ajouter des jetons tant qu'il y a au moins un zéro dans la liste correspondant au nombre de jetons par urne. Pour cela on cherche les composantes de liste égales à 0 avec la commande find( ) et on compte combien il y en a avec la commande length( ).

```
def T():
        X=0
        Y=0
        Z=0
        n=0
        liste=[X,Y,Z]
        while min(liste)==0:
                i=rd.randint(1,4)
                liste[i-1]= liste[i-1]+1
                n=n+1
        t= n
        return(t)
```

(b) Ici, le sujet propose $n = 10000$. On stocke donc 10000 réalisations de la variable $T$ simulée avec la fonction ci-avant et on en fait la moyenne.

```
ech=[]
for k in range(10000):
        ech.append(T())
M=np.mean(ech)
print(M)
```

(c) Il faut au moins placer 3 jetons si on veut espérer remplir les 3 urnes, mais on peut attendre arbitrairement longtemps, en remplissant successivement les mêmes urnes. On a donc clairement $T(\Omega) = [\![3; +\infty[\![$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Observons que

$$[T = n] \cup V_n = V_{n-1}.$$

En effet, si au moins une urne est vide après $n-1$ jetons placés, il y a deux situations (incompatibles) : ou bien il reste encore au moins une urne vide après le $n$-ième jeton (c'est à dire $V_n$ ) ou bien, on remplit toutes les urnes pour la première fois avec le $n$ )ième jeton (c'est à dire $[T = n]$ ). L'incompatibilité donne bien

$$P(T = n) + P\left(V_n\right) = P\left(V_{n-1}\right) \Longleftrightarrow P(T = n) = P\left(V_{n-1}\right) - P\left(V_n\right).$$

(e) On peut commencer par expliciter la loi de $T$. D'après les questions précédentes, on a, pour $n \geq 3$,

$$\begin{aligned}
P(T = n) &= 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n} \\
&= 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\right] \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.
\end{aligned}$$

On revient ensuite à la définition de l'espérance.

$$\begin{aligned}
T \text{ admet une espérance } &\Longleftrightarrow \sum nP(T = n) \text{ converge (absolument)} \\
&\Longleftrightarrow \sum n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \text{converge}
\end{aligned}$$

Or,

$$n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)=n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-2n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

et on reconnait une combinaison linéaire de termes généraux de séries géométriques dérivées convergentes (de raisons respectives 2/3 et 1/3 ). Donc $T$ admet une espérance et

$$\begin{aligned}E(T)&=\sum_{n=3}^{+\infty}n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-2\sum_{n=3}^{+\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\\&=\frac{1}{(1-2/3)^2}-1-\frac{4}{3}-2\left(\frac{1}{(1-1/3)^2}-1-\frac{2}{3}\right)\\&=\frac{11}{2}.\end{aligned}$$

# Partie II

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $W_n$ la variable aléatoire égale au nombre d'urne(s) encore vide(s) après le placement des $n$ premiers jetons.

4. (a) Commençons par observer qu'après avoir placé 2 jetons on a entre 1 et 2 urnes vides. Connaissant combien de jetons contient l'urne 1 grâce à $X_2$, on sait ce qui se passe. On peut écrire le tableau de la loi conjointe. On introduit aussi $N_i$ la variable qui renvoie le numéro de l'urne dans laquelle on place le jeton $i$. D'après les hypothèses, les variables $N_i$ sont indépendantes et suivent toutes des lois uniformes sur $[\![1;3]\!]$.

$$\begin{aligned}P\left(X_2=0\cap W_2=1\right)&=P\left([N_1=2\cap N_2=3]\cup[N_1=3\cap N_2=2]\right)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\\&=\frac{2}{9}\\P\left(X_2=0\cap W_2=2\right)&=P\left([N_1=2\cap N_2=2]\cup[N_1=3\cap N_2=3]\right)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\\&=\frac{2}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}P\left(X_2=1\cap W_2=1\right)=\\P\left([N_1=1\cap N_2=2]\cup[N_1=1\cap N_2=3]\cup[N_1=2\cap N_2=1]\cup[N_1=3\cap N_2=1]\right)\\=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\\=\frac{4}{9}\\P\left(X_2=1\cap W_2=2\right)=0\quad\text{(impossible)}\\P\left(X_2=2\cap W_2=1\right)=0\quad\text{(impossible)}\\P\left(X_2=2\cap W_2=2\right)=\frac{P\left([N_1=1\cap N_2=1]\right)}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\\=\frac{1}{9}\end{gathered}$$

Ce qui donne le tableau :

| $X_2\backslash W_2$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 0 | 2/9 | 2/9 |
| 1 | 4/9 | 0 |
| 2 | 0 | 1/9 |

(b) On en déduit, en sommant les termes de chaque colonne (formule des probabilités totales avec le s.c.e $\{[X_2 = i] : i \in [\![0;2]\!]\}$), la loi de $W_2$ :

| $j$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| $P(W_2 = j)$ | 2/3 | 1/3 |

(c) La covariance de $W_2$ et $X_2$ se calcule avec la formule

$$\mathrm{cov}(X_2, W_2) = E(X_2 W_2) - E(X_2) E(W_2).$$

Connaissant la loi de $X_2$ (le cours donne $E(X_2) = 2/3$ ) et la loi de $W_2$ par la question précédente, on a $E(W_2) = 4/3$. Le tableau de la loi conjointe donne

$$E(X_2 W_2) = 4/9 + 4/9 = 8/9$$

et au final, on trouve

$$\mathrm{cov}(X_2, W_2) = \frac{8}{9} - \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = 0.$$

(d) La covariance des deux variables est nulle, mais attention, il ne s'agit pas de conclure qu'elles sont indépendantes : c'est la réciproque qui est vraie. Ici, elle ne sont pas indépendantes. On peut proposer comme contre-exemple

$$P(X_2 = 1 \cap W_2 = 2) = 0 \neq P(X_2 = 1) P(W_2 = 2).$$

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 3.

5. On peut avoir placé tous les jetons dans la même urne (auquel cas $W_n = 2$ ), ou dans deux urnes différentes (auquel cas $W_n = 1$ ) ou dans les trois (ce qui donne $W_n = 0$ ). On a donc

$$W_n(\Omega) = [\![0, 2]\!].$$

6. Pour $i \in [\![1, 3]\!]$, on note $W_{n,i}$ la variable aléatoire égale à 1 si l'urne $i$ est encore vide après le placement des $n$ premiers jetons, et qui vaut 0 sinon.

(a) $W_{n,i}$ est une variable de Bernoulli. Son espérance est donc égale à son paramètre. L'urne 1 (resp. 2,3) est vide si $X_n = 0$ (resp. $Y_n = 0, Z_n = 0$). Les trois évènements susmentionnés ayant la même probabilité on a, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$

$$E(W_{n,i}) = P(W_{n,i} = 1) = P(X_n = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

(b) Il est clair que

$$W_n = W_{n,1} + W_{n,2} + W_{n,3}.$$

(c) Par linéarité de l'espérance, on a donc

$$E(W_n) = E(W_{n,1}) + E(W_{n,2}) + E(W_{n,3}) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

7. Comme

$$[X_n = n] = [X_n = n] \cap [W_n = 2],$$

on a

$$P([X_n = n] \cap [W_n = 2]) = P(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

D'autre part, si $W_n = 2$ alors tous les jetons sont placés dans la même urne et il n'est pas possible d'avoir ; chaque urne contient donc 0 ou $n$ jetons et donc

$$P\left([X_n = k] \cap [W_n = 2]\right) = 0, \quad k \in [\![1, n-1]\!].$$

8. On s'intéresse à l'évènement

$$[X_n = k] \cap [W_n = 1], \quad k \in [\![1, n-1]\!].$$

Cet évènement signifie qu'on a placé $k$ des $n$ jetons dans l'urne 1 et les $n-k$ jetons restants dans une (et même) autre urne. Il y a 2 façons de choisir la deuxième urne à remplir. Il y a $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ façons de choisir les $k$ jetons parmi les $n$ que l'on va mettre dans l'urne 1 , les autres étant automatiquement placés dans la deuxième urne choisie. Pour chacune de ces possibilités, la probabilité est $(1/3)^n$. On a bien

$$P\left([X_n = k] \cap [W_n = 1]\right) = 2 \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Naturellement, si $[X_n = n]$ tous les jetons sont placés dans la même urne et il y en a deux qui restent vides ; ainsi

$$P\left(X_n = n \cap W_n = 1\right) = 0.$$

9. Par le théorème de transfert

$$\begin{aligned} E\left(X_n W_n\right) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{2} kiP\left(X_n = k \cap W_n = i\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{2} kiP\left(X_n = k \cap W_n = i\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} kP\left(X_n = k \cap W_n = 1\right) + \sum_{k=1}^{n-1} 2kP\left(X_n = k \cap W_n = 2\right) + 2nP\left(X_n = n \cap W_n = 2\right) \\ &= 2nP\left(X_n = n \cap W_n = 2\right) + \sum_{k=1}^{n-1} kP\left(X_n = k \cap W_n = 1\right) \\ &= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1} kP\left(X_n = k \cap W_n = 1\right) \end{aligned}$$

comme demandé.

10. On poursuit le calcul en ajoutant le résultat obtenu plus haut. On va aussi utiliser la formule classique (dont on omet la preuve)

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

$$\begin{aligned}
E\left(X_n W_n\right) &= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1} kP\left(X_n = k \cap W_n = 1\right) \\
&= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1} k2\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1} \\
&= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} \\
&= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} \\
&= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n 2^{n-1} \qquad \text{(formule du binôme)} \\
&= n\left(\frac{2}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

comme demandé.
On calcule ensuite la covariance avec la même formule que plus haut. Comme $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/3)$, on a

$$E\left(X_n\right) = \frac{n}{3}$$

Il suit que

$$C(X_n, W_n) = n\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{n}{3} \times 3\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

11. La covariance précédente est nulle, pourtant (tout comme précédemment pour n = 2) les variables $X_n$ et $W_n$ ne sont pas indépendantes fournissant un nouveau contre-exemple à la réciproque du résultat du cours affirmant que si deux variables aléatoires sont indépendantes, leur covariance est nulle.