

DS n°7

Option Économique

MATHÉMATIQUES

16 Mars 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice n°1

On considère l'application $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $]0; +\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t \ln(t) & \text{si } t \neq 0; \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

On admet : $0,69 < \ln(2) < 0,70$.

PARTIE I : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est continue sur $]0; +\infty[$.
2. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0; +\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.
3. Dresser le tableau des variations de f . On précisera la limite de f en $+\infty$.
4. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
 - (a) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Donner une interprétation graphique.
 - (b) Montrer que C admet un point d'inflexion et un seul, noté I , et préciser les coordonnées de I .
 - (c) Tracer l'allure de C .
5. Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in]0; +\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

PARTIE II : Étude d'une fonction F de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0; +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , définie, pour tout (x, y) de $]0; +\infty[^2$, par :

$$F(x, y) = x \ln(y) - y \ln(x).$$

6. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x, y) de $]0; +\infty[^2$.
7. (a) Soit $(x, y) \in]0; +\infty[^2$. Montrer que (x, y) est un point critique de F si et seulement si :

$$x > 1, \quad y = \frac{x}{\ln(x)} \quad \text{et} \quad f(\ln(x)) = 1.$$

- (b) Établir que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (e, e) .
8. La fonction F admet-elle un extremum local en (e, e) ?

PARTIE III : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

9. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

10. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

11. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite. (On pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto t - \ln(t)$.)

12. Écrire un programme en Python qui calcule et affiche un entier naturel N tel que $1 - u_N < 10^{-4}$.

Exercice n°2

Partie I

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. On considère la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à a_0 , et dont tous les autres coefficients sont égaux à a_1 :

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

On note I_n la matrice identité d'ordre n .

1. Étude du cas $n = 3$.

Dans cette question, on considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Justifier que la matrice M est diagonalisable.
- (b) Calculer $(M + I)^2$, puis en déduire un polynôme annulateur de M .
- (c) Déterminer les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de M .

Dans les questions qui suivent, on considère la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (d) Montrer que P est inversible et que

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (e) Posons $D = P^{-1}MP$. Déterminer les coefficients de la matrice D .
- (f) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel k ,

$$M^k = PD^kP^{-1}.$$

- (g) Soit $k \in \mathbb{N}$. On admet qu'il existe deux réels a_k et b_k tels que

$$M^k = a_kM + b_kI_3.$$

En utilisant les résultats précédents, déterminer a_k et b_k .

Cas général ($n \geq 2$)

On considère la matrice J_n carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 :

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Relations algébriques.

(a) Montrer que, pour tout entier naturel $k \neq 0$,

$$J_n^k = n^{k-1} J_n.$$

(b) Exprimer M_n en fonction de I_n et J_n .

(c) En déduire, pour tout entier naturel $k \neq 0$,

$$M_n^k = c_k J_n + (-1)^k I_n,$$

où

$$c_k = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i}.$$

(d) Montrer que, pour tout entier naturel $k \neq 0$,

$$c_k = \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}.$$

(e) En déduire, pour tout entier naturel $k \neq 0$, une expression explicite des coefficients diagonaux et des coefficients hors diagonale de M_n^k en fonction de n et k .

Partie II

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On considère le graphe non orienté K_n à n sommets numérotés de 1 à n , dans lequel chaque sommet est relié à chaque autre sommet par une arête et n'est pas relié à lui-même par une arête.

- Représenter graphiquement les graphes K_2 , K_3 , K_4 et K_5 .
- (a) Déterminer la matrice d'adjacence du graphe K_n .
(b) Dans le graphe K_4 , combien existe-t-il de chaînes (ou chemins) de longueur 4 menant du sommet numéro 1 à lui-même ? On pourra utiliser le résultat de la question 2^e.
- Déterminer le degré de chaque sommet du graphe K_n .
- Montrer que le nombre total d'arêtes du graphe K_n est égal à

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Partie III

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et K_n le graphe défini dans la partie II. On parcourt les sommets du graphe K_n de la façon suivante :

- Initialement, à l'étape $k = 0$, on se trouve sur le sommet numéro 1.
- À chaque étape, on change de sommet en suivant, au hasard et avec équiprobabilité, l'une des arêtes issues du sommet actuel.

Pour tout entier naturel k , on note X_k la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel on se trouve à la $k^{\text{ème}}$ étape (c'est à dire à l'issue du $k^{\text{ème}}$ déplacement). En particulier, X_0 est une variable aléatoire constante égale à 1.

Pour tout entier naturel k , on note V_k la matrice ligne de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ définie par

$$V_k = (P(X_k = 1), P(X_k = 2), \dots, P(X_k = n)).$$

7. Déterminer V_0 et V_1 .
8. Déterminer la matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
9. (a) Rappeler la définition d'un état stable d'une chaîne de Markov $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
- (b) Soit V la matrice ligne de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à $\frac{1}{n}$,

$$V = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right).$$

Montrer que V est un état stable de la chaîne de Markov $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

10. (a) Pour tout entier naturel k , rappeler sans démonstration une expression de V_{k+1} en fonction de V_k, M_n et n , où M_n est la matrice définie par (3) en introduction de la partie I.
- (b) En déduire, pour tout entier naturel k :

$$V_k = \frac{1}{(n-1)^k} V_0 (M_n)^k$$

- (c) En utilisant le résultat de la question 2e, en déduire que la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on reconnaîtra la loi.
11. Comparer et commenter les résultats des questions 9b et 10c.

Exercice n°3

Partie I

On dispose de trois urnes U_1, U_2, U_3 et d'une infinité de jetons numérotés $1, 2, 3, 4, \dots$. On répartit les jetons un à un : pour chaque jeton, on choisit au hasard et avec équiprobabilité l'une des trois urnes dans laquelle on le place. Le placement de chaque jeton est indépendant de tous les autres jetons, et la capacité des urnes n'est pas limitée. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note

$$X_n \text{ (resp. } Y_n, Z_n)$$

le nombre de jetons présents dans l'urne 1 (resp. 2, 3) après avoir réparti les n premiers jetons.

1. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note V_n l'événement :

« Après la répartition des n premiers jetons, au moins une urne reste vide ».

 - (a) Justifier que X_n, Y_n, Z_n suivent la même loi binomiale dont on précisera les paramètres.
 - (b) Expliciter $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n)$.
 - (c) Justifier que $(Y_n = 0) \cap (Z_n = 0) = (X_n = n)$.
 - (d) Exprimer l'événement V_n à l'aide des événements $(X_n = 0), (Y_n = 0)$ et $(Z_n = 0)$.
 - (e) En déduire que

$$P(V_n) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

2. On note V l'événement « au moins l'une des trois urnes reste toujours vide ». Exprimer V à l'aide des V_n , puis montrer que $P(V) = 0$.

3. Soit T la variable aléatoire égale au nombre de jetons nécessaires pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton.

- (a) En rappelant que sous Python la fonction `rd.randint(a,b+1,[n,p])` renvoie une matrice $n \times p$ dont chaque coefficient est la réalisation d'une variable aléatoire indépendante suivant une loi uniforme sur $\{a, \dots, b\}$, compléter la fonction Python suivante afin qu'elle simule le placement des jetons jusqu'au moment où chaque urne contient au moins un jeton, et qu'elle renvoie la valeur prise par T :

```
def T ():
    X = 0
    Y = 0
    Z = 0
    n = 0
    liste = [X , Y , Z]
    while ...:
        i = rd.randint (1 ,4); // choix d'un entier entre 1 et 3
        liste [i] = ...
        n = n + 1

    t = ...
    return (t)
```

- (b) Écrire un script Python qui simule 10 000 fois la variable T et qui renvoie une approximation de son espérance (en supposant que cette espérance existe).
 (c) Déterminer $T(\Omega)$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs possibles de T .
 (d) Montrer que, pour tout $n \in T(\Omega)$,

$$P(T = n) = P(V_{n-1}) - P(V_n).$$

- (e) Démontrer que T possède une espérance et calculer cette espérance.

Partie II

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note W_n la variable aléatoire égale au nombre d'urnes encore vides après le placement des n premiers jetons.

4. a) Donner la loi du couple (X_2, W_2) .
 b) En déduire la loi de W_2 et calculer son espérance.
 c) Calculer la covariance de X_2 et W_2 .
 d) Les variables aléatoires X_2 et W_2 sont-elles indépendantes ?
 5. Soit $n \geq 3$. Déterminer $W_n(\Omega)$.
 6. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note $W_{n,i}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si l'urne i est encore vide après le placement des n premiers jetons, et 0 sinon.

- a) Montrer que, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$\mathbb{E}(W_{n,i}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

- b) Exprimer W_n en fonction de $W_{n,1}, W_{n,2}, W_{n,3}$.
 c) En déduire

$$\mathbb{E}(W_n) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

7. Démontrer que : $P((X_n = n) \cap (W_n = 2)) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, quelle est la valeur de $P((X_n = k) \cap (W_n = 2))$?

8. Démontrer que : $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, P((X_n = k) \cap (W_n = 1)) = \frac{2 \binom{n}{k}}{3^n}$.

Que vaut $P((X_n = n) \cap (W_n = 1))$?

9. Démontrer que :

$$E(X_n W_n) = 2nP((X_n = n) \cap (W_n = 2)) + \sum_{k=1}^{n-1} kP((X_n = k) \cap (W_n = 1)).$$

10. Montrer alors que $E(X_n W_n) = n \left(\frac{2}{3}\right)^n$, puis calculer $C(X_n, W_n) = E(X_n W_n) - E(X_n)E(W_n)$.

11. Interpréter le résultat obtenu à la question précédente.