

Sujet de la semaine n°1

Option Économique

MATHÉMATIQUES

7 Septembre 2026

Exercice n°1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$.

1. (a) Donner l'ensemble de définition de f . On notera $\mathcal{D}_f$ cet ensemble.
(b) Montrer par l'absurde que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \neq 3$.
(c) Calculer la dérivée f' puis donner le tableau de variation de f .
(d) Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 1$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \ln(x)$.
(a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f \circ g$ (que l'on notera $\mathcal{D}_{f \circ g}$) puis déterminer l'expression de $f \circ g(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_{f \circ g}$.
(b) Résoudre l'équation $f \circ g(x) = 2$ d'inconnue $x \in \mathcal{D}_{f \circ g}$.

Exercice n°2

On considère la fonction $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est paire.
3. Calculer la dérivée de f et dresser le tableau de variations de f .
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x = \ln(1 + e^{-2x})$.
5. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > x$.
6. Résoudre l'inéquation $f(x) < x + 1$.
7. Tracer sur un même graphique les courbes représentatives de f , ainsi que les droites $D_1 : y = x$ et $D_2 : y = x + 1$.
8. Ecrire un programme Python qui définit la fonction f et qui donne sa représentation graphique.

Exercice n°3

On suppose exécutées dans Python les commandes suivantes `import numpy as np`.

1. (a) Expliquer précisément le fonctionnement du programme suivant, notamment celui des commandes suivantes :

```
def f(x):  
    y=np.abs(2*x-4)+3  
    return(y)  
  
a=input('Donner un réel')  
print(f(a))
```

- (b) Pour quelles valeurs de a Python renvoie la valeur 6 ? Justifier.
2. (a) Expliquer ce que fait le programme suivant

```
def g(x):
    y=np.sqrt(2*x-4)
    return(y)

x=g(3);
y=g(4);
print(x>y)
print(x**2+2==y**2)
```

- (b) Qu'affichera Python pour les deux dernières lignes ? Justifier.

Exercice n°4

- Déterminer deux réels a et b tels que pour tout entier $k \geq 3$: $-\frac{8}{k^2-2k} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-2}$.
- En déduire, pour tout $n \geq 3$, $\sum_{k=3}^n \frac{-8}{k^2-2k}$.

Exercice n°5

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right)$$

- Donner $P_n(0)$, $P_n(1)$ et $P_n(-n)$.
- Montrer que pour tout réel x non nul, on a $P_n(x) = \frac{x+n}{x} P_n(x-1)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer par récurrence sur p que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $P_n(p) = \frac{(n+p)!}{p!n!}$.

Problème

Soit n un entier naturel non nul, et x un nombre réel. On considère la somme $S_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^k$.

Etude de cas particuliers

- On pose ici $x = 1$. On a $S_n(1) = \sum_{k=1}^n k$. Rappeler l'expression de $S_n(1)$.
- On pose à présent $x = 2$. On a $S_n(2) = \sum_{k=1}^n k2^k$. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n(2) = 2 + (n-1)2^{n+1}$$

- On pose maintenant $x = \frac{1}{2}$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul

$$S_n\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Etude du cas général

On suppose à présent, et jusqu'à la fin de l'exercice, que $x \neq 1$.

- (a) Soit n et p deux entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$. Montrer que $\sum_{k=p}^n x^k = x^p \sum_{k=0}^{n-p} x^k$.

(b) Montrer que pour $n \geq 1$,
$$\sum_{k=1}^n kx^{k+1} = \sum_{i=2}^{n+1} ix^i - \sum_{i=2}^{n+1} x^i.$$

- En gardant le symbole somme, développer $(1-x)S_n(x)$ et montrer que

$$(1-x)S_n(x) = x^2 \times \frac{1-x^n}{1-x} + x - (n+1)x^{n+1}$$

- En déduire que $S_n(x) = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$

Une autre façon de trouver S_n .

- Rappeler, pour tout nombre $x \neq 1$, l'expression de $T_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k$ en fonction de x .
- En déduire la dérivée $T'_n(x)$.
- Ecrire $T_n(x)$ en extension, puis dériver la somme obtenue. Vérifier que $xD'_n(x) = S_n(x)$.
- En déduire que pour tout réel $x \neq 1$, : $S_n(x) = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$.