

Sujet de la semaine n°2

Option Économique

MATHÉMATIQUES

14 Septembre 2026

Exercice n°1 : Questions en vrac

1. Déterminer un équivalent puis calculer les limites des suites définies par les termes généraux suivant :

$$u_n = \frac{3n^4 - 2n^3 + n + 1}{2n^4 - n^2 + 2n + 5} \quad v_n = \frac{e^{3n} - \ln(n)^4 + n^2}{e^{2n} - n^4} \quad w_n = 2^n \left(\left(\frac{1}{3} \right)^n - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right)$$

2. Montrer que l'application f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + 2y + z, -x - y - z, -2y - 2z) \end{array}$$

est bijective et donner son application réciproque.

Exercice n°2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3x^4 + 14x^3 + 23x^2 + 16x + 4}{3x^3 + 2x^2 - 3x - 2}$.

On considère également les polynômes définis sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} P(x) = 3x^4 + 14x^3 + 23x^2 + 16x + 4 \\ Q(x) = 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2 \end{cases}$

1. Déterminer une racine évidente de Q puis factoriser le polynôme Q .
2. Montrer que -1 est racine de P et de P' .
3. On admet qu'il existe un polynôme S tel que $\forall x \in \mathbb{R} \ P(x) = (x+1)^2 S(x)$.
 - (a) Quel est le degré de S ?
 - (b) Déterminer pour tout $x \in \mathbb{R} \ S(x)$, et donner la factorisation complète de $P(x)$.
4. Donner pour tout $x \in D_f$, une expression factorisée et simplifiée de $f(x)$.
5. Déterminer deux réels a et b tels que $\forall x \in D_f, f(x) = x + a + \frac{b}{x-1}$.
6. Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $\pm\infty$. Donner son équation.

Exercice n°3

Un commerçant dispose d'un stock de plantes. Chacune des plantes fleurit une fois par an.

Pour chaque plante, la première année, la probabilité de donner une fleur rose est égale à $3/4$ et la probabilité de donner une fleur blanche est égale à $1/4$.

Puis les années suivantes, pour tout entier naturel non nul :

- Si l'année n la plante a donné une fleur rose, alors elle donnera une fleur rose l'année $n + 1$.
- Si l'année n la plante a donné une fleur blanche, alors elle donnera de façon équiprobable une fleur rose ou une fleur blanche l'année $n + 1$.

n désigne un entier naturel non nul. Pour une plante donnée, on note p_n la probabilité de l'événement R_n "la plante donne une fleur rose la n ième année".

Les questions 1,2,3 et 4 sont indépendantes.

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \frac{p_n}{2} + \frac{1}{2}$.
(b) Ecrire un programme Python qui demande à l'utilisateur un entier n et qui permet de calculer p_n .
(c) Donner la valeur de p_n en fonction de n et en déduire la limite de (p_n) quand n tend vers $+\infty$.
(d) Déterminer un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $1 - p_n < 10^{-3}$.
(e) Ecrire un programme Python qui renvoie le premier rang n pour lequel $1 - p_n < 10^{-3}$.
- Quelle est la probabilité que la plante ne donne que des fleurs roses pendant les n premières années ?
- Quelle est la probabilité que la plante ne donne que des fleurs blanches pendant les n premières années ?
- Un client achète 10 plantes. On note P_i l'événement " la plante i donne une fleur blanche la première année". Quelle est la probabilité qu'au moins une des 10 plantes donne une fleur blanche la première année ?

Exercice n°4

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite géométrique de raison e^{-1} et de terme initial 1, et (S_n) la suite définie pour tout $n \geq 0$ par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On définit également la suite (v_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{e^n + e^{-n}}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression explicite de u_n . Déterminer la limite de (u_n) .
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de S_n . En déduire que (S_n) converge et donner sa limite.
- Montrer que pour $n \geq 0$, $v_n = \frac{u_n}{1 + u_n^2}$.
- En déduire que pour tout $n \geq 0$, $\frac{u_n}{2} \leq v_n \leq u_n$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $T_n = \sum_{k=0}^n v_k$. Montrer que (T_n) est croissante et majorée. Que peut-on en déduire ?
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{S_n}{2} \leq T_n \leq S_n$.

Exercice n°5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ par $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2}$ et $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Etude de la fonction f .

- Étudier la parité de f . Que peut-on en déduire graphiquement ?
- Étudier les variations de f .
- Que doit-on taper dans Python pour avoir la représentation graphique de f sur $[3, 10]$?

4. Montrer que pour tout réel $x > \sqrt{2}$, $f(x) > 1$.
5. (a) Soit P le polynôme défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = -x^3 + x^2 + 2x$. Factoriser le polynôme P .
 (b) Etudier le signe de P .
 (c) Montrer que pour tout $x \geq 2$, $f(x) \leq x$.

6. On note g la restriction de f à $]\sqrt{2}; +\infty[$, c'est à dire $g : \begin{cases}]\sqrt{2}, +\infty[& \longrightarrow &]1, +\infty[\\ x & \longmapsto & \frac{x^2}{x^2 - 2} \end{cases}$.

Montrer que g est bijective et donner son application réciproque.

Etude d'une suite récurrente.

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.
8. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.
9. En déduire que $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Problème

Partie 1

Soient A et P les matrices définies par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible d'inverse $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.
2. On pose $T = PAP^{-1}$. Calculer T , T^2 , T^3 puis déterminer T^n pour tout $n \geq 3$.
3. En déduire que pour tout $n \geq 3$, $A^n = 0_3$.
4. Pour tout réel t , on définit la matrice $E(t)$ par $E(t) = I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2$.
 - (a) Que vaut $E(0)$?
 - (b) Montrer que pour tout couple $(t, t') \in \mathbb{R}^2$, $E(t)E(t') = E(t + t')$.
 - (c) Soit $t \in \mathbb{R}$. A l'aide de la question précédente, calculer $E(t)E(-t)$. En déduire que la matrice $E(t)$ est inversible et exprimer son inverse à l'aide de t , I_3 , A , A^2 .
 - (d) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, conjecturer une expression de $E(t)^n$ en fonction de I_3 , A , A^2 , t et n et prouver cette conjecture.

Partie 2

Soient $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer que Q est inversible et donner Q^{-1} .
 (b) Vérifier que la matrice D définie par $D = Q^{-1}BQ$ est une matrice diagonale. Donner alors, sans preuve, l'expression de D^n pour tout $n \geq 0$.
 (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = QD^nQ^{-1}$.
 (d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$.
 (e) Écrire un programme Python demandant à l'utilisateur un entier n et qui affiche la valeur de B^n .

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} B^k$$

La matrice $E_n(t)$ étant une matrice carrée d'ordre 2, nous la noterons : $E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & c_n(t) \\ b_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, $a_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{2t^k - (2t)^k}{k!}$.

(b) De la même manière, donner pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$ une expression de $b_n(t)$, $c_n(t)$ et $d_n(t)$.

Partie 3

Soit $E = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les matrices E_1 et E_2 telles que pour tout t réel, on ait

$$E(t) = e^t E_1 + e^{2t} E_2$$

2. Calculer $E_1^2, E_2^2, E_1 E_2, E_2 E_1$.

3. En déduire que pour tout réel t , $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse.