

Sujet de la semaine n°5

Option Économique
MATHÉMATIQUES

5 Octobre 2026

Exercice n°1

On note I_4 la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

On définit l'ensemble $\mathcal{E}$ par :

$$\mathcal{E} = \left\{ M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1. Question de cours : Énoncer la formule du binôme de Newton pour deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Justifier que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et en donner une base.
3. Écrire une fonction Python qui prend en entrée une matrice M de taille 4 et renvoie un message permettant de savoir si M appartient ou non à $\mathcal{E}$.
4. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $M_{a,b} \in \mathcal{E}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner une expression matricielle de $M_{a,b}^k$ en fonction de k, a et b .
5. (*) Justifier que les matrices de $\mathcal{E}$ sont simultanément diagonalisables, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$\forall M \in \mathcal{E}, \quad M = PDP^{-1}$$

où D est une matrice de taille 4 diagonale à déterminer. On donnera une expression matricielle de P .

Exercice n°2

Soit la relation de récurrence :

$$(\mathcal{R}) \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour } n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - 4 + e^{u_n} \end{cases}$$

1. Cours. Théorème de la limite monotone pour une suite.
2. Montrer que $(\mathcal{R})$ définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que cette suite est décroissante, et qu'elle tend vers $-\infty$.
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1 - 4n + \sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k}$. En déduire : $1 - 4n \leq u_n \leq e - 3n$.

(b) Montrer que la somme $\sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k}$ est majorée par la constante $\frac{e^e}{1 - e^{-3}}$.

4. (a) Déterminer une suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général de la forme $w_n = c \cdot n^p$, avec $c \in \mathbb{R}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$, telle que les suites $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soient équivalentes quand n tend vers $+\infty$.
- (b) Montrer que pour $n \geq 700$, $\left| \frac{u_n}{w_n} - 1 \right| < 10^{-2}$.
- (c) Compléter le programme Python ci-dessous pour qu'il donne le plus petit entier naturel n tel que $\left| \frac{u_n}{w_n} - 1 \right| < 10^{-2}$.

```
from numpy import exp, abs
u=-3+exp(1)
n=1
while ..... >= .01 :
    u=.....
    n+=1
print(n)
```