

MATHÉMATIQUES

4 Septembre 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice n°1

On considère la fonction φ définie sur $] -\infty, 1]$ par :

$$\forall x \in] -\infty, 1], \quad \varphi(x) = \begin{cases} x + (1-x) \ln(1-x) & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Partie A : Étude de la fonction φ

- Montrer que la fonction φ est continue sur $] -\infty, 1]$.

RÉPONSE:

La fonction φ est continue car :

- de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty, 1[$ en tant que somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty, 1[$.
Notons que la fonction $g : x \mapsto \ln(1-x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty, 1[$ car elle est la composée $g = g_2 \circ g_1$ de :
 - $g_1 : x \mapsto 1-x$ qui est :
 - de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty, 1[$,
 - telle que : $g_1(] -\infty, 1]) \subset]0, +\infty[$.
 - $g_2 : x \mapsto \ln(x)$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
- en 1. En effet :
 - d'une part, avec le changement de variable $u = 1-x$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \ln(1-x) = \lim_{u \rightarrow 0} u \ln(u) = 0 \quad (\text{par croissances comparées})$$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = 1 + 0 = 1.$$

- d'autre part : $\varphi(1) = 1$.

$$\text{On obtient bien : } \lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = \varphi(1).$$

La fonction φ est donc continue sur $] - \infty, 1]$.

* * *

2. (a) Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - \infty, 1[$ et montrer que pour tout $x \in] - \infty, 1[$, $\varphi'(x) = -\ln(1-x)$.

RÉPONSE:

- La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] - \infty, 1[$ donc $\mathcal{C}^1$ sur $] - \infty, 1[$.
- Soit $x \in] - \infty, 1[$.

$$\varphi'(x) = 1 + (-1) \times \ln(1-x) + (1-x) \times \left(-\frac{1}{1-x}\right) = 1 - \ln(1-x) - 1$$

Finalement : $\varphi' : x \mapsto -\ln(1-x)$.

* * *

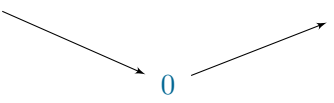
- (b) En déduire les variations de φ sur $] - \infty, 1]$.

RÉPONSE:

- Soit $x \in] - \infty, 1[$.

$$\begin{aligned} \varphi'(x) > 0 &\Leftrightarrow -\ln(1-x) > 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(1-x) < 0 \\ &\Leftrightarrow 1-x < e^0 = 1 \text{ (par stricte croissance de la fonction exp sur } \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow 0 < x \end{aligned}$$

- On obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	0	1
$\varphi'(x)$	-	0	+
φ			

Détaillons le calcul de $\varphi(0)$:

$$\varphi(0) = 0 + (1-0) \ln(1-0) = \ln(1) = 0$$

* * *

- (c) La fonction φ est-elle dérivable en 1?

RÉPONSE:

Soit $x \in]-\infty, 1[$.

$$\begin{aligned}
 \tau_1(\varphi)(x) &= \frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x - 1} \\
 &= \frac{x + (1 - x) \ln(1 - x) - 1}{x - 1} \\
 &= \frac{x - 1 - (x - 1) \ln(1 - x)}{x - 1} \\
 &= \frac{\cancel{(x - 1)} (1 - \ln(1 - x))}{\cancel{x - 1}} \\
 &= 1 - \ln(1 - x)
 \end{aligned}$$

Or, avec le changement de variable $u = 1 - x$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} 1 - \ln(1 - x) = \lim_{u \rightarrow 0} 1 - \ln(u) = +\infty$$

La fonction taux d'accroissement $\tau_1(\varphi)$ n'admet donc pas de limite finie en 1.

On en conclut que la fonction φ n'est pas dérivable en 1.

3. Calculer la limite de φ en $-\infty$.

RÉPONSE:

Soit $x \in]-\infty, 0[$.

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= x + (1 - x) \ln(1 - x) \\
 &= x + \ln(1 - x) - x \ln(1 - x) \\
 &= x \ln(1 - x) \left(\frac{1}{\ln(1 - x)} + \frac{1}{x} - 1 \right) \\
 &\quad (\text{la mise en facteur est licite car comme } x < 0 : x \ln(1 - x) \neq 0)
 \end{aligned}$$

Or :

- avec le changement de variable $u = 1 - x$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 - x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln(u) = +\infty$.

$$D'où : \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\ln(1 - x)} = 0.$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln(1 - x) = -\infty$.

On en déduit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = +\infty$.

4. Etudier la convexité de φ sur $]-\infty, 1[$.

RÉPONSE:

La fonction φ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$ elle également de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\infty, 1[$.

$$\forall x < 1, \varphi''(x) = \frac{1}{1 - x} > 0$$

La fonction φ est convexe sur $]-\infty, 1[$.

* * *

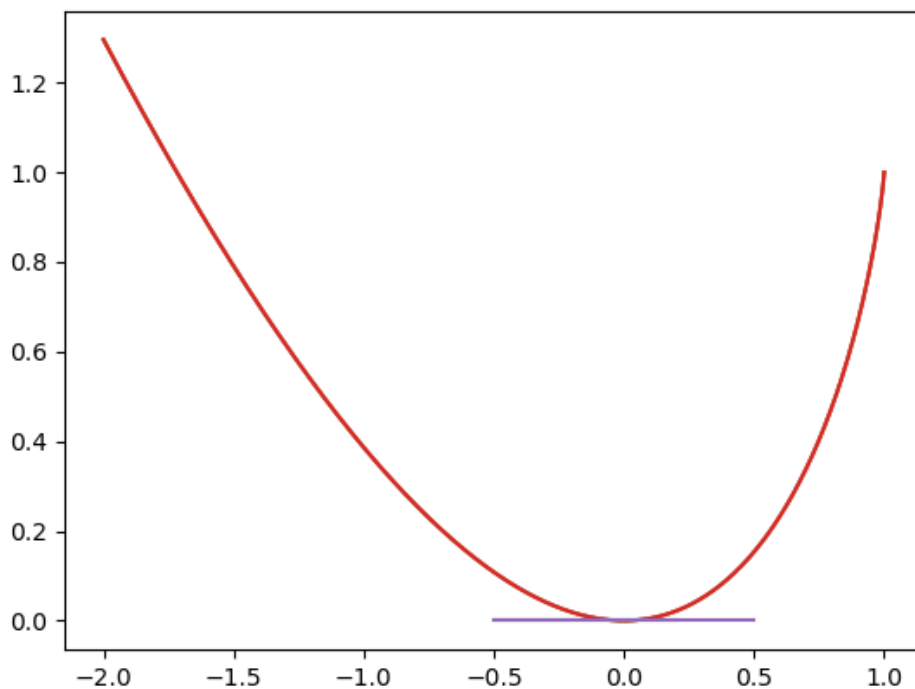
5. Donner l'équation de la tangente en 0 puis tracer l'allure de la courbe représentative de φ en soignant le tracé aux voisinages de 0 et 1.

RÉPONSE:

L'équation de la tangente en 0 est :

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0) = 0$$

Une représentation graphique est



* * *

6. (a) Soit $a \in]0; 1]$. à l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $I_a = \int_a^1 t \ln(t) dt$.

RÉPONSE:

On pose $\begin{cases} u(t) &= t^2/2 \\ u'(t) &= t \end{cases}$ et $\begin{cases} v(t) &= \ln(t) \\ v'(t) &= 1/t \end{cases}$ Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[a, 1]$, donc par IPP :

$$I_a = \left[\frac{t^2 \ln(t)}{2} \right]_a^1 - \int_a^1 \frac{t}{2} dt = -a^2 \ln(a) - \left[\frac{t^2}{4} \right]_a^1 = \boxed{-a^2 \ln(a) - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4}}$$

* * *

(b) En déduire : $F_a = \int_0^{1-a} \varphi(x) dx$ et montrer que $\lim_{a \rightarrow 0} F_a = \frac{1}{4}$.

RÉPONSE:

On effectue le changement de variable $x = 1 - t$.

$$F_a = \int_1^a \varphi(1-t)(-dt) = \int_a^1 1-t dt + \int_a^1 t \ln(t) = -a + \frac{a^2}{2} + 1 - \frac{1}{2} - a^2 \ln(a) - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4} = \boxed{\frac{1}{4} - a + \frac{3a^2}{2} - a^2 \ln(a)}$$

Or par croissance comparées, $\lim_{a \rightarrow 0} a^2 \ln(a) = 0$ donc $\lim_{a \rightarrow 0} F_a = \frac{1}{4}$
* * *

Partie B : Étude de deux séries

Soit x un réel appartenant à $[0, 1[$.

7. (a) Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Rappeler l'expression de $\sum_{k=0}^n t^k$.

RÉPONSE:

Il s'agit d'une formule du cours :

$$\boxed{\sum_{k=0}^n t^k = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}}$$

* * *

(b) Vérifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $[0, x]$: $\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{t^n}{1-t}$.

RÉPONSE:

D'après la question précédente, $\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1 - t^n}{1 - t} = \frac{1}{1 - t} - \frac{t^n}{1 - t}$. Ainsi

$$\boxed{\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{t^n}{1-t}}$$

* * *

(c) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $-\ln(1-x) - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On intègre l'égalité de la question précédente entre 0 et x . On obtient :

$$\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k \right) dt = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

Étudions le membre de gauche. Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k \right) dt &= \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_0^x t^k dt \right) \\
 &= [-\ln(1-t)]_0^x - \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{k+1} t^{k+1} \right]_0^x \\
 &= -\ln(1-x) + \ln(1-0) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} (x^{k+1} - 0^{k+1}) \\
 &= -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} \\
 &= -\ln(1-x) - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} \quad (\text{par décalage d'indice})
 \end{aligned}$$

$$\textbf{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*, -\ln(1-x) - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

8. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-x)}$.

En déduire la limite de $\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $t \in [0, x]$.

$$0 \leq t \leq x \Leftrightarrow 1 \geq 1-t \geq 1-x \Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-x}$$

Ainsi

$$t^n \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-x}$$

$$\textbf{Par transitivité : } \forall t \in [0, x], 0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-x}.$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leq x$) :

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-x} dt$$

Or :

$$\int_0^x \frac{t^n}{1-x} dt = \frac{1}{1-x} \int_0^x t^n dt = \frac{1}{1-x} \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]_0^x = \frac{1}{1-x} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

On obtient :

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}$$

- De plus $x < 1$ donc $x^{n+1} \leq 1$ donc $\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)} \leq \frac{1}{(n+1)(1-x)}$.

$$\textbf{On en conclut, par transitivité : } 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-x)}$$

* * *

9. Montrer alors que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge et que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

RÉPONSE:

• D'après la question 6.b), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

Or, d'après la question précédente : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$. On en déduit que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) + 0$$

• Par ailleurs, $\left(\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$.

On en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ est convergente et : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

* * *

10. (a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{(a+b)n+a}{n(n+1)}$$

Par identification, on trouve

$$\begin{cases} a+b &= 0 \\ a &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} b &= -1 \\ a &= 1 \end{cases}}$$

* * *

(b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge et que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \varphi(x)$.

RÉPONSE:

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\sum_{n=1}^N \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{x^{n+1}}{n+1} = x \sum_{n=1}^N \frac{x^n}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{x^n}{n} = x \sum_{n=1}^N \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{x^n}{n} + x$$

On observe alors, d'après la question 9, que les termes généraux sont ceux de séries convergentes et donc que

$$\text{la série } \sum_{n \geq 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \text{ converge}$$

. De plus

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + x = -x \ln(1-x) + \ln(1-x) + x = x + (1-x) \ln(1-x) = \boxed{\varphi(x)}$$

11. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et que l'on a encore : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \varphi(1)$.

RÉPONSE:

On effectue un télescopage. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{i=2}^{N+1} \frac{1}{i} = 1 - \frac{1}{N+1}$$

Or $\lim_{N \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1 = \varphi(1)$ donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \varphi(1).$$

Partie C : Application en probabilité

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et une boule rouge. On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard selon le protocole suivant :

- si on obtient une boule bleue, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule bleue supplémentaire ;
- si on obtient une boule rouge, on la remet dans l'urne et on arrête l'expérience.

On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher et on admet que l'expérience s'arrête avec une probabilité égale à 1. On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience, R_k l'évènement "on obtient une boule rouge au k -ième tirage", et B_k l'évènement "on obtient une boule bleue au k -ième tirage".

12. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer l'évènement $[N = n]$ en fonction des évènements B_k et R_k .

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'urne contient au début 2 boules. Ainsi l'évènement $[N = n]$ se réalise si et seulement si on a ajouté $n - 2$ boules, c'est à dire ssi on a tiré $n - 2$ fois une boule bleue puis une rouge. On en déduit que

$$\boxed{N = n} = \left(\bigcap_{k=1}^{n-2} B_k \right) \cap R_{n-1}$$

(b) Montrer soigneusement : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, P(N = n) = \frac{1}{n(n-1)}$.

RÉPONSE:

On utilise la formule des probabilités composées (les évènements ne sont pas indépendants ici) :

$$\begin{aligned} P(N = n) &= P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1 \cap B_2}(B_3) \dots P_{\bigcap_{k=1}^{n-3} B_k}(B_{n-2})P_{\bigcap_{k=1}^{n-2} B_k}(R_n) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{1}{n} \\ &= \boxed{\frac{1}{n(n-1)}} \quad \text{par télescopage} \end{aligned}$$

(c) La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

RÉPONSE:

La variable N a pour support $\llbracket 2; +\infty \rrbracket$ qui est infini. Elle admet une espérance si et seulement si $\sum_{n \geq 2} nP(N = n)$ converge, c'est à dire ssi $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n-1}$ converge. À un décalage d'indice près, on reconnaît le terme général de la série harmonique. Celle diverge donc

N n'admet pas d'espérance

13. Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction Python suivante de façon à ce qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire N .

```
def simuleN():
    b = 1 #b désigne le nombre de boules bleues dans l'urne
    while rd.rand() < ... :
        b=b+1
    return(...)
```

```
def simuleN():
    b = 1 #b désigne le nombre de boules bleues dans l'urne
    while rd.rand() < b/(b+1) :
        b=b+1
    return(b+1)
```

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ et N sont mutuellement indépendantes.

On note F la fonction de répartition commune aux variables aléatoires X_n pour n appartenant à $\mathbb{N}^*$, c'est à dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = P(X_1 \leq x) = P(X_2 \leq x) = \dots = P(X_n \leq x)$$

On définit la variable aléatoire $T = \max(X_1, \dots, X_N)$.

Ainsi par exemple, si N prend la valeur 3, alors $T = \max(X_1, X_2, X_3)$; si N prend la valeur 5, alors $T = \max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$; etc.

14. (a) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, P_{[N=n]}(T \leq x) = (F(x))^n$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $x \in \mathbb{R}$.

$$P_{[N=n]}(T \leq x) = P_{[N=n]}([X_1 \leq x] \cap [X_2 \leq x] \cap \dots \cap [X_n \leq x])$$

Les variables $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ et N étant mutuellement indépendantes,

$$\begin{aligned} P_{[N=n]}(T \leq x) &= P([X_1 \leq x] \cap [X_2 \leq x] \cap \dots \cap [X_n \leq x]) \\ &= \prod_{k=1}^n P(X_k \leq x) \\ &= \prod_{k=1}^n F(x) \quad \text{car elles ont même loi} \\ &= \boxed{(F(x))^n} \end{aligned}$$

* * *

(b) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}, P(T \leq x) = \varphi(F(x))$.

RÉPONSE:

La famille $([N = n])_{n \geq 2}$ est un système complet d'évènement, donc d'après la formule des probabilités totales, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P(T \leq x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} P_{[N=n]}(T \leq x) P(N = n) \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} (F(x))^n \times \frac{1}{n(n-1)} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (F(x))^k \times \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{par changement d'indice} \\ &= \boxed{\varphi(F(x))} \quad \text{d'après la question 10.b} \end{aligned}$$

* * *

Exercice n°2

Dans tout l'exercice, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On notera respectivement I_3 et 0_3 la matrice identité et la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit F l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont des réels quelconques.

Soit G l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M$.

Partie I

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F et préciser la dimension de F .

RÉPONSE:

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. D'après la définition du texte

$$\begin{aligned} M \in F &\iff \exists a, b \in \mathbb{R}, \quad M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \\ &\iff \exists a, b \in \mathbb{R}, \quad M = aI + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, on peut écrire

$$F = \text{Vect} \left(I, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

et F est donc le sous-espace vectoriel engendré par les deux matrices ci-dessus : c'est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. La famille formée par les deux matrices susmentionnées en est génératrice et elle est clairement libre (deux vecteurs non colinéaires) : elle en forme une base. Ainsi, $\dim(F) = 2$.

2. G est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

RÉPONSE:

Il est immédiat de voir que I est un élément de G , car $I^2 = I$. Cependant, $2I \notin G$. En effet, $(2I)^2 = 4I \neq 2I$ et G n'est pas stable par multiplication par un réel et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Soit $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

- (a) Démontrer que $A \in F \cap G$.

RÉPONSE:

En prenant $a = 2/3$ et $b = -1/3$ dans la définition de F , on a bien $A \in F$ et le calcul donne

$$A^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = A$$

* * *

(b) En déduire un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(A) = 0$. Donner ses racines.

RÉPONSE:

Comme A vérifie la relation $A^2 = A$, on en déduit que le polynôme $X^2 - X$ annule A . Ses racines sont 0 et 1.

* * *

(c) On note $E_0 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$ et $E_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$. Montrer que ce sont deux espaces vectoriels et donner une base de chacun d'entre eux.

RÉPONSE:

• Pour E_0 :

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0 &\iff AX = 0 \\ &\iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \\ &\iff X = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E_0 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(Le vecteur ci-dessus étant non nul et générateur de E_0 , il en forme une base.)

• Pour E_1 :

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 &\iff (A - I)X = 0 \\ &\iff \begin{cases} -x - y - z = 0 \\ x = -y - z \end{cases} \\ &\iff X = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, 1 est bien valeur propre et

$$E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(Les deux vecteurs ci-dessus étant non colinéaires et générateurs de E_1 , il en forment une base.)

* * *

(d) La matrice A est-elle inversible ?

RÉPONSE:

Comme nous l'avons vu dans la question précédente pour E_0 , le système associé à A n'est pas de Cramer, donc A n'est pas inversible 0 étant valeur propre de A , celle-ci n'est pas inversible.

* * *

(e) (*) La matrice A est-elle diagonalisable ?

RÉPONSE:

Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, la matrice est diagonalisable.

* * *

Partie II

On considère dans cette partie une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ de F avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

4. (a) Démontrer que :

$$M \in G \iff \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b + 2a - 1) = 0 \end{cases}$$

RÉPONSE:

On va résoudre $M^2 = M$ pour caractériser l'appartenance à G en commençant par calculer M^2 . On a

$$\begin{aligned} M \in G &\iff M^2 = M \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 + 2b^2 & b^2 + 2ab & b^2 + 2ab \\ b^2 + 2ab & a^2 + 2b^2 & b^2 + 2ab \\ b^2 + 2ab & b^2 + 2ab & a^2 + 2b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b^2 + 2ab = b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b + 2a - 1) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

* * *

(b) Montrer alors que : $F \cap G = \{I_3, 0_3, A, I_3 - A\}$.

RÉPONSE:

La deuxième équation $b(b + 2a - 1) = 0$ donne $b = 0$ ou $b = 1 - 2a$. Si $b = 0$, on obtient en injectant dans la première équation que $a^2 = a$ ce qui donne $a = 0$ ou $a = 1$. La matrice M correspondant à $a = b = 0$ est la matrice nulle qui est donc élément de $F \cap G$. La matrice M pour $a = 1$ et $b = 0$ est la matrice I . Si maintenant $b = 1 - 2a$, on a $b^2 = 1 - 4a + 4a^2$ et en injectant dans la première équation, on a

$$a^2 + 2(1 - 4a + 4a^2) = a \iff 9a^2 - 9a + 2 = 0 \iff a = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad a = \frac{2}{3}.$$

Au final,

$$\begin{aligned} M \in F \cap G &\iff \begin{cases} a^2 + 2b^2 &= a \\ b(b + 2a - 1) &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a &= 0 \\ b &= 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a &= 1 \\ b &= 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a &= 1/3 \\ b &= 1/3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a &= 2/3 \\ b &= -1/3 \end{cases} \end{aligned}$$

En observant ensuite que

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right) = I - A$$

et que le choix de $a = 2/3$ et $b = -1/3$ donne la matrice A , on a bien

$$F \cap G = \{0, I, A, I - A\}.$$

* * *

5. On note $B = I_3 - A$. Démontrer que (A, B) est une base de F .

RÉPONSE:

I et A étant deux matrices non colinéaires de F (on a bien justifié plus haut que $A \in F$ car A correspond à $a = 2/3$ et $b = -1/3$) qui est de dimension 2, il est clair que la famille (A, B) forme une base de F .

* * *

6. (a) On note $\alpha = a - b$ et $\beta = a + 2b$. Vérifier que : $M = \alpha A + \beta B$.

RÉPONSE:

On pose $\alpha = a - b$ et $\beta = a + 2b$. On a

$$\begin{aligned} \alpha A + \beta B &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 2\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 2\alpha \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \beta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta & \beta - \alpha & \beta - \alpha \\ \beta - \alpha & 2\alpha + \beta & \beta - \alpha \\ \beta - \alpha & \beta - \alpha & 2\alpha + \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or,

$$1/3(2\alpha + \beta) = a \quad \text{et} \quad 1/3(\beta - \alpha) = b$$

On a donc bien la relation

$$M = \alpha A + \beta B$$

* * *

(b) Calculer AB et BA .

RÉPONSE:

Comme $A^2 = A$ (car $A \in G$), avec la définition de B , on a bien

$$AB = A(I - A) = (I - A)A = BA = A - A^2 = 0.$$

En particulier, A et B commutent.

* * *

(c) Montrer que pour tout entier naturel n : $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$.

RÉPONSE:

Si $n = 0$, alors la formule est clairement valide car

$$\alpha^0 A + \beta^0 B = A + B = A + I - A = I = M^0.$$

Soit ensuite $n \geq 1$. Comme $M = \alpha A + \beta B$ et qu'on veut calculer M^n , tout est fait pour nous faire penser à utiliser la formule du binôme. Observons que comme A et B commutent, il en est de même pour αA et βB :

$$\alpha A \cdot \beta B = \alpha \beta AB = \beta \alpha BA = \beta B \cdot \alpha A = 0.$$

De plus, comme $A \in G$, on a $A^2 = A$ et une récurrence immédiate donne $A^k = A$ pour tout $k \geq 1$. De même pour B qui vérifie $B^k = B$, pour tout $k \geq 1$. De plus, $AB = 0$. Il suit que

$$\begin{aligned} M^n &= (\alpha A + \beta B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha A)^k (\beta B)^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} (\beta B)^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (\alpha A)^k (\beta B)^{n-k} + \binom{n}{n-1} (\alpha A)^n \\ &= \beta^n B + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} AB + \alpha^n A \\ &= \alpha^n A + \beta^n B, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

* * *

7. (a) Montrer que M est inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.

RÉPONSE:

- Si $\alpha = 0$ (resp. $\beta = 0$) alors $M = \beta B$ (resp. $M = \alpha A$) et M n'est pas inversible en tant que multiple d'une matrice non inversible.
- Si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, alors

$$(\alpha^{-1} A + \beta^{-1} B) (\alpha A + \beta B) = A + \alpha^{-1} \beta AB + \beta^{-1} \alpha BA + B = A + B = I,$$

et $M = \alpha A + \beta B$ est bien inversible (et on a même M^{-1}).

* * *

(b) Si α et β sont deux réels non nuls, montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$M^{-n} = \alpha^{-n}A + \beta^{-n}B$$

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme M est inversible, M^n l'est aussi et on a $(M^n)^{-1} = M^{-n}$. On vérifie donc que $\alpha^{-n}A + \beta^{-n}B$ est l'inverse de M^n , matrice pour laquelle on a une formule.

$$\begin{aligned} (\alpha^{-n}A + \beta^{-n}B) \cdot (\alpha^nA + \beta^nB) &= \alpha^0A^2 + \alpha^{-n}\beta^nAB + \beta^{-n}\alpha^nBA + \beta^0B^2 \\ &= A + B = I, \end{aligned}$$

et on a bien le résultat voulu.

Partie III

Soient $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On considère la suite (X_n) de matrices colonnes définie par $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = TX_n + Y$$

8. Calculer la matrice $I_3 - T$ et exprimer cette matrice en fonction de A et B .

RÉPONSE:

Le calcul donne

$$I - T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

correspond à une matrice M de F avec $a = -2$ et $b = -1$. Or, on sait d'après ce qui précède que

$$I - T = \alpha A + \beta B$$

avec

$$\alpha = a - b = -2 + 1 = -1, \quad \text{et} \quad \beta = a + 2b = -4.$$

On peut donc écrire

$$I - T = -A - 4B.$$

9. À l'aide de la question 7, calculer la matrice $(I_3 - T)^{-1}$.

RÉPONSE:

Comme $(-1, -4) \neq (0, 0)$, la question (7a) permet d'affirmer que $I - T$ est inversible et la question (7b) donne même

$$\begin{aligned} (I - T)^{-1} &= (-1)^{-1}A + (-4)^{-1}B = -A - \frac{1}{4}B \\ &= \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

* * *

10. Démontrer qu'il existe une unique matrice colonne L , que l'on déterminera, telle que : $L = TL + Y$.

RÉPONSE:

On utilise la question précédente

$$TL + Y = L \iff L - TL = Y \iff (I - T)L = Y \iff L = (I - T)^{-1}Y.$$

On trouve donc une unique solution L qui s'écrit

$$L = (I - T)^{-1}Y = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -Y.$$

* * *

11. Démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $X_{n+1} - L = T(X_n - L)$, puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n - L = T^n(X_0 - L)$$

RÉPONSE:

On injecte l'équation de la question précédente. Par définition

$$\begin{aligned} X_{n+1} - L &= TX_n + Y - L = TX_n + Y - TL - Y \\ &= T(X_n - L), \end{aligned}$$

ce qu'on demandait. Une récurrence facile termine la question. initialisation. Pour $n = 0$, on a bien

$$X_0 - L = I(X_0 - L) = T^0(X_0 - L).$$

hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $X_n - L = T^n(X_0 - L)$. Alors,

$$\begin{aligned} X_{n+1} - L &= T(X_n - L) && \text{(d'après la question précédente)} \\ &= T \cdot T^n(X_0 - L) && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= T^{n+1}(X_0 - L), \end{aligned}$$

ce qui termine cette récurrence très facile.

* * *

12. Pour tout entier naturel n , exprimer X_n en fonction de A , B , L , X_0 et n .

RÉPONSE:

On pourrait penser qu'il suffit de remplacer par les éléments des questions et parties précédentes.

$$X_n = L + T^n(X_0 - L)$$

On se rend compte alors qu'il faut calculer T^n en fonction de A et B . On peut car T s'exprime à partir de A et B . En effet, on peut voir que

$$T = 2A + 5B$$

de sorte que

$$T^n = 2^n A + 5^n B$$

Il suit finalement que

$$X_n = L + 2^n A(X_0 - L) + 5^n B(X_0 - L).$$

* * *

Exercice n°3

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O

Au départ, le mobile est à l'origine.

Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n , alors, à l'instant $(n + 1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k + 1)$ avec la probabilité p ($0 < p < 1$) ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1 - p$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.

On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).

Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.

On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

1. (a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i .

RÉPONSE:

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $(T = k)$ signifie que le mobile revient en O pour la première fois à k . Donc qu'il y est à k et qu'il n'y était pas avant :

Conclusion : $(T = k) = \bigcap_{i=1}^{k-1} (X_i \neq 0) \cap (X_k = 0)$

- (b) Donner la loi de X_1 .

RÉPONSE:

Comme il est au point d'abscisse 0 à l'instant 0, il passera en 1 avec une probabilité p et reviendra (restera) en 0 avec une probabilité $1 - p$

Donc $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ $P(X_1 = 0) = 1 - p$ et $P(X_1 = 1) = p$

(X_1 suit une loi de Bernouilli de paramètre $1 - p$)

- (c) En déduire $P(T = k)$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de T .

RÉPONSE:

Les X_i ne sont pas indépendants, mais on a (probabilités composées)

$$\begin{aligned} P(T = k) &= P(X_1 \neq 0) P_{X_1 \neq 0}(X_2 \neq 0) \dots P_{X_{k-1} \neq 0}(X_k = 0) \\ &= p \cdot p \dots (1 - p) \\ &= p^{k-1} p \end{aligned}$$

car lorsqu'il n'est pas en O , il y revient avec la probabilité $(1 - p)$ et il n'y revient pas (avance d'une case) avec la probabilité p .

Conclusion : $\text{Donc } T \text{ suit une loi géométrique de paramètre } 1 - p$

2. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $X_n(\Omega) = [[0, n]]$

RÉPONSE:

On a vu que $X_0(\Omega) = \{0\}$ et $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$

Soit $n \geq 1$ tel que $X_n(\Omega) = [[0, n]]$

Les valeurs possibles de X_n vont de 0 à n . Comme l'abscisse du point peut augmenter de 1, X_{n+1} peut prendre toutes les valeurs de $[[1, n+1]]$.

Et comme il peut également revenir à l'origine, $X_{n+1}(\Omega) = [[0, n+1]]$

Donc, par récurrence, pour tout entier naturel n , $X_n(\Omega) = [[0, n]]$

(b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'événements $(X_{n-1} = k)_{0 \leq k \leq n-1}$ pour montrer que :
 $P(X_n = 0) = 1 - p$.

RÉPONSE:

On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X_{n-1} = k)_{0 \leq k \leq n-1}$:

$$\begin{aligned} P(X_n = 0) &= \sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1} = k) P_{X_{n-1}=k}(X_n = 0) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (1-p) P(X_{n-1} = k) \\ &= (1-p) \sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1} = k) \\ &= 1-p \end{aligned}$$

car la probabilité de revenir en 0 est $(1-p)$ et que $(X_{n-1} = k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est un système complet d'événements.

Conclusion : $P(X_n = 0) = 1 - p$

3. (a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n+1\}, P(X_{n+1} = k) = p P(X_n = k-1)$.

RÉPONSE:

Comme il ne peut avancer que d'un à chaque étape, pour être en k à l'instant $n+1$, le point devait être en $k-1$ à l'instant précédent.

Donc $(X_{n+1} = k) = (X_n = k-1) \cap (X_{n+1} = k)$

Et

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = k) &= P(X_n = k-1) P_{X_n=k-1}(X_{n+1} = k) \\ &= p P(X_n = k-1) \end{aligned}$$

car la probabilité d'avancer d'un est p

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n+1\}, P(X_{n+1} = k) = p P(X_n = k-1)$

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, P(X_n = k) = p^k (1-p)$.

En déduire également la valeur de $P(X_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

RÉPONSE:

- Pour $n = 1$, et pour $k = 0$ on a $P(X_1 = 0) = 1 - p = p^0(1 - p)$
- Soit $n \geq 1$ tel que $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, P(X_n = k) = p^k(1 - p)$.
Comme $\forall k \in \{1, 2, \dots, n+1\} : P(X_{n+1} = k) = pP(X_n = k-1)$ alors pour $k-1 \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$,
donc pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket : P(X_{n+1} = k) = pp^{k-1}(1 - p) = p^k(1 - p)$

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, P(X_n = k) = p^k(1 - p)}$

et on a $P(X_{n+1} = n+1) = p \cdot P(X_n = n)$

En effet, pour être en n à l'instant n , il doit avoir avancé d'un à chaque étape, ceci avec une probabilité de p .
Donc la suite $(P(X_n = n))_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison p et de premier terme $P(X_0 = 0) = 1$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : P(X_n = n) = p^n \cdot 1}$

(c) Vérifier que $\sum_{k=0}^n P(X_n = k) = 1$.

RÉPONSE:

Pour calculer la somme, on doit distinguer la valeur $k = n$ et les autres :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n P(X_n = k) &= P(X_n = n) + \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) \\ &= p^n + \sum_{k=0}^{n-1} p^k(1 - p) \\ &= p^n + (1 - p) \frac{1 - p^n}{1 - p} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ce calcul (découpage de $\sum$) n'étant valable que pour $n-1 \geq 0$ donc pour $n \geq 1$

pour $n = 0 : \sum_{k=0}^0 P(X_0 = k) = 1$

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \frac{1}{3}$. On importe les bibliothèques `import numpy as np` et `import numpy.random as rd`.

On rappelle que `rd.randint(3)` renvoie au hasard un entier de $\{0, 1, 2\}$.

Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
def edhec2005() :
    x=0
    for k in range (1,n+1):
        u=rd.randint(3)
        if u==2 :
            x= .....
        else:
            x=...
    return(x)
```

RÉPONSE:

```
def edhec2005() :
    x=0
    for k in range (1,n+1):
        u=rd.randint(3)
        if u==2 :
            x= x+1
        else:
            x=0
    return(x)
```

5. (a) Montrer que : $\forall n \geq 2, \sum_{k=1}^{n-1} k p^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - n p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$

RÉPONSE:

Les trois méthodes classiques pour obtenir ce résultat sont :

- par récurrence sur n (le plus naturel puisque le résultat est donné)
- en dérivant la fonction $x \rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} x^k$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} x^k \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(x) = \sum_{k=1}^{n-1} k x^{k-1}$$

Et comme, pour $x \neq 1$, $f(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$ alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-nx^{n-1}(1-x) + (1-x^n)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

$$\text{et donc } \sum_{k=1}^{n-1} k x^{k-1} = \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2} \text{ pour tout } x \neq 1.$$

- en développant $(1-p) \sum_{k=1}^{n-1} k p^{k-1}$:

$$\begin{aligned} (1-p) \sum_{k=1}^{n-1} k p^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} k p^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} k p^k \\ &= \sum_{h=0}^{n-2} (h+1) p^h - \sum_{k=1}^{n-1} k p^k \\ &= \sum_{h=0}^{n-2} p^h + \sum_{h=0}^{n-2} h p^h - \sum_{k=1}^{n-1} k p^k \\ &= \frac{1-p^{n-1}}{1-p} + 0 - (n-1)p^{n-1} \text{ car } p \neq 1 \\ &= \frac{1-p^{n-1} - (1-p)(n-1)p^{n-1}}{1-p} \\ &= \frac{1 - n p^{n-1} + (n-1)p^n}{1-p} \end{aligned}$$

et donc $(1 - p \neq 0)$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k p^{k-1} = \frac{1 - n p^{n-1} + (n-1) p^n}{(1-p)^2}$$

* * *

(b) En déduire que $E(X) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$.

RÉPONSE:

On calcule l'espérance en traitant à part les valeurs $k = 0$ et n : (pour $n \geq 2$)

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^n k P(X=k) = 0 P(X=0) + n P(X=n) + \sum_{k=1}^{n-1} k P(X=k) \\ &= n p^n + \sum_{k=0}^{n-1} k (1-p) p^k \text{ on fait réapparaître l'expression précédente} \\ &= n p^n + (1-p) p \sum_{k=1}^{n-1} k p^{k-1} \\ &= n p^n + (1-p) p \frac{1 - n p^{n-1} + (n-1) p^n}{(1-p)^2} \\ &= p \frac{n p^{n-1} (1-p) + 1 - n p^{n-1} + (n-1) p^n}{1-p} \\ &= p \frac{1 - p^n}{1-p} \end{aligned}$$

formule qui est également valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

* * *

6. (a) Montrer, en utilisant la question 3a), que : $\forall n \in \mathbb{N}, E(X_{n+1}^2) = p(E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1)$.

RÉPONSE:

On a $P(X_{n+1} = k) = p P(X_n = k-1)$ pour $k \in [[1, n+1]]$
D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}^2) &= \sum_{k=0}^{n+1} k^2 P(X_{n+1} = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} k^2 p P(X_n = k-1) \\ &= p \sum_{h=-1}^n (h+1)^2 p P(X_n = h) \\ &= p \sum_{h=0}^n (h^2 + 2h + 1) p P(X_n = h) + 0 \\ &= p \left(\sum_{h=0}^n h^2 p P(X_n = h) + 2 \sum_{h=0}^n h p P(X_n = h) + \sum_{h=0}^n p P(X_n = h) \right) \\ &= p (E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1) \end{aligned}$$

* * *

(b) Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = E(X_n^2) + (2n-1) \frac{p^{n+1}}{1-p}$

Montrer que $u_{n+1} = p u_n + \frac{p(1+p)}{1-p}$

RÉPONSE:

Avec $u_n = E(X_n^2) + (2n-1) \frac{p^{n+1}}{1-p}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= E(X_{n+1}^2) + (2(n+1)-1) \frac{p^{n+2}}{1-p} \\ &= p(E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1) + (2n+1) \frac{p^{n+2}}{1-p} \\ &= pE(X_n^2) + 2p^2 \frac{1-p^n}{1-p} + p + (2n+1) \frac{p^{n+2}}{1-p} \\ &= pE(X_n^2) + p^2 \frac{2(1-p^n) + (2n+1)p^n}{1-p} + p \\ &= pE(X_n^2) + p^2 \frac{2 + (2n-1)p^n}{1-p} + p \\ &= pE(X_n^2) + \frac{p^2 + p + (2n-1)p^{n+2}}{1-p} \end{aligned}$$

en remplaçant $E(X_n)$ par sa valeur.

Et en partant du second membre :

$$\begin{aligned} p u_n + \frac{p(1+p)}{1-p} &= p \left(E(X_n^2) + (2n-1) \frac{p^{n+1}}{1-p} \right) + \frac{p(1+p)}{1-p} \\ &= pE(X_n^2) + \frac{p^2 + p + (2n-1)p^{n+2}}{1-p} \\ &= u_{n+1} \end{aligned}$$

Conclusion : $u_{n+1} = p u_n + \frac{p(1+p)}{1-p}$

* * *

(c) En déduire l'expression de u_n , puis celle de $E(X_n^2)$ en fonction de p et n .

RÉPONSE:

La suite u est donc arithmético-géométrique.

On détermine c tel que $c = p c + \frac{p(1+p)}{1-p} \iff c(1-p) = \frac{p(1+p)}{1-p} \iff c = \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}$

Et soit $v_n = u_n - c$ pour tout n entier.

On a alors $v_{n+1} = u_{n+1} - c = p u_n + \frac{p(1+p)}{1-p} - \left(p c + \frac{p(1+p)}{1-p} \right) = p v_n$

Et la suite v est géométrique de raison p et de premier terme $v_0 = u_0 - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}$

avec $u_0 = E(X_0^2) + \frac{p}{1-p} = -\frac{p}{1-p}$ donc $v_0 = -\frac{p}{1-p} - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} = \frac{-2p}{(1-p)^2}$

$v_n = \frac{-2p^{n+1}}{(1-p)^2}$ et $u_n = v_n + c = \frac{-2p^{n+1}}{(1-p)^2} + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} = \frac{-2p^{n+1} + p(1+p)}{(1-p)^2}$

Et comme

$$\begin{aligned}
 E(X_n^2) &= u_n - (2n-1) \frac{p^{n+1}}{1-p} \\
 &= \frac{-2p^{n+1} + p(1+p)}{(1-p)^2} - (2n-1) \frac{p^{n+1}}{1-p} \\
 &= \frac{-2p^{n+1} + p(1+p) - (1-p)(2n-1)p^{n+1}}{(1-p)^2} \\
 &= \frac{(-2n-1+p(2n-1))p^{n+1} + p(1+p)}{(1-p)^2}
 \end{aligned}$$

* * *

(d) Montrer enfin que : $V(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2} (1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1})$

RÉPONSE:

On développe le calcul de la variance :

$$\begin{aligned}
 V(X_n) &= E(X_n^2) - E(X_n)^2 \\
 &= \frac{(-2n-1+p(2n-1))p^{n+1} + p(1+p)}{(1-p)^2} - p^2 \frac{(1-p^n)^2}{(1-p)^2} \\
 &= \frac{(-2n-1+p(2n-1))p^{n+1} + p(1+p) - p^2(1-2p^n+p^{2n})}{(1-p)^2} \\
 &= \frac{p}{(1-p^2)} [(-2n-1+p(2n-1))p^n + 1 + p - p(1-2p^n+p^{2n})] \\
 &= \frac{p}{(1-p^2)} [(-2n-1+p(2n+1))p^n + 1 - p^{2n+1}] \\
 &= \frac{p}{(1-p^2)} [1 + (2n+1)(-1+p)p^n - p^{2n+1}]
 \end{aligned}$$

* * *