

CONCOURS BLANC N°1

Option Économique

MATHÉMATIQUES

4 Septembre 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Les questions précédées de (*) sont destinées aux cubes.

Dans tout ce sujet on supposera les commandes Python suivantes exécutées :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

. Exercice n°1

On considère la fonction φ définie sur $] -\infty, 1]$ par :

$$\forall x \in] -\infty, 1], \quad \varphi(x) = \begin{cases} x + (1-x) \ln(1-x) & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Partie A : Étude de la fonction φ

1. Montrer que la fonction φ est continue sur $] -\infty, 1]$.
2. (a) Justifier que φ est de classe $\mathbb{C}^1$ sur $] -\infty, 1[$ et montrer que pour tout $x \in] -\infty, 1[$:

$$\varphi'(x) = -\ln(1-x)$$

(b) En déduire les variations de φ sur $] -\infty, 1]$.

(c) La fonction φ est-elle dérivable en 1 ?

3. Calculer la limite de φ en $-\infty$.
4. Etudier la convexité de φ sur $] -\infty, 1[$.
5. Donner l'équation de la tangente en 0 puis tracer l'allure de la courbe représentative de φ en soignant le tracé aux voisinages de 0 et 1.

6. (a) Soit $a \in]0, 1]$. à l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $I_a = \int_a^1 t \ln(t) dt$.

(b) En déduire : $F_a = \int_0^{1-a} \varphi(x) dx$ et montrer que $\lim_{a \rightarrow 0} F_a = \frac{1}{4}$.

Partie B : Étude de deux séries

Soit x un réel appartenant à $[0, 1[$.

7. (a) Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Rappeler l'expression de $\sum_{k=0}^n t^k$.
- (b) Vérifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $[0, x]$: $\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{t^n}{1-t}$.
- (c) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $-\ln(1-x) - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.
8. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-x)}$.
- En déduire la limite de $\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.
9. Montrer alors que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge et que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.
10. (a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.
- (b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge et que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \varphi(x)$.
11. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et que l'on a encore : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \varphi(1)$.

Partie C : Application en probabilité

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et une boule rouge. On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard selon le protocole suivant :

- si on obtient une boule bleue, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule bleue supplémentaire ;
- si on obtient une boule rouge, on la remet dans l'urne et on arrête l'expérience.

On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher et on admet que l'expérience s'arrête avec une probabilité égale à 1. On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience, R_k l'évènement "on obtient une boule rouge au k -ième tirage", et B_k l'évènement "on obtient une boule bleue au k -ième tirage".

12. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer l'évènement $[N = n]$ en fonction des évènements B_k et R_k .
- (b) Montrer soigneusement : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, P(N = n) = \frac{1}{n(n-1)}$.
- (c) La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

13. Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction Python suivante de façon à ce qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire N .

```
def simuleN():
    b = 1 #b désigne le nombre de boules bleues dans l'urne
    while rd.rand() < ... :
        b=b+1
    return(...)
```

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ et N sont mutuellement indépendantes.

On note F la fonction de répartition commune aux variables aléatoires X_n pour n appartenant à $\mathbb{N}^*$, c'est à dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = P(X_1 \leq x) = P(X_2 \leq x) = \dots = P(X_n \leq x)$$

On définit la variable aléatoire $T = \max(X_1, \dots, X_N)$.

Ainsi par exemple, si N prend la valeur 3, alors $T = \max(X_1, X_2, X_3)$; si N prend la valeur 5, alors $T = \max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$; etc.

14. (a) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, P_{[N=n]}(T \leq x) = (F(x))^n$.

- (b) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}, P(T \leq x) = \varphi(F(x))$.

. Exercice n°2

Dans tout l'exercice, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On notera respectivement I_3 et 0_3 la matrice identité et la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit F l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont des réels quelconques.

Soit G l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M$.

Partie I

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F et préciser la dimension de F .
2. G est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
3. Soit $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
 - (a) Démontrer que $A \in F \cap G$.
 - (b) En déduire un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(A) = 0$. Donner ses racines.
 - (c) On note $E_0 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$ et $E_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$. Montrer que ce sont deux espaces vectoriels et donner une base de chacun d'entre eux.
 - (d) La matrice A est-elle inversible ?
 - (e) (*) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Partie II

On considère dans cette partie une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ de F avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

4. (a) Démontrer que :

$$M \in G \iff \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b + 2a - 1) = 0 \end{cases}$$

- (b) Montrer alors que : $F \cap G = \{I_3, 0_3, A, I_3 - A\}$.

5. On note $B = I_3 - A$. Démontrer que (A, B) est une base de F .

6. (a) On note $\alpha = a - b$ et $\beta = a + 2b$. Vérifier que : $M = \alpha A + \beta B$.

- (b) Calculer AB et BA .

- (c) Montrer que pour tout entier naturel n : $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$.

7. (a) Montrer que M est inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.

- (b) Si α et β sont deux réels non nuls, montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$M^{-n} = \alpha^{-n} A + \beta^{-n} B$$

Partie III

Soient $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On considère la suite (X_n) de matrices colonnes définie par $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = TX_n + Y$$

8. Calculer la matrice $I_3 - T$ et exprimer cette matrice en fonction de A et B .

9. À l'aide de la question 7, calculer la matrice $(I_3 - T)^{-1}$.

10. Démontrer qu'il existe une unique matrice colonne L , que l'on déterminera, telle que : $L = TL + Y$.

11. Démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $X_{n+1} - L = T(X_n - L)$, puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n - L = T^n(X_0 - L)$$

12. Pour tout entier naturel n , exprimer X_n en fonction de A, B, L, X_0 et n .

. Exercice n°3

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O

Au départ, le mobile est à l'origine.

Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n , alors, à l'instant $(n + 1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k + 1)$ avec la probabilité p ($0 < p < 1$) ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1 - p$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.

On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).

Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$.
Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.

On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

1. (a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i .
(b) Donner la loi de X_1 .
(c) En déduire $P(T = k)$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de T .
2. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $X_n(\Omega) = [[0, n]]$
(b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'événements $(X_{n-1} = k)_{0 \leq k \leq n-1}$ pour montrer que : $P(X_n = 0) = 1 - p$
3. (a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n+1\}, P(X_{n+1} = k) = p P(X_n = k-1)$
(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, P(X_n = k) = p^k (1-p)$.
En déduire également la valeur de $P(X_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.
(c) Vérifier que $\sum_{k=0}^n P(X_n = k) = 1$.

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \frac{1}{3}$. On importe les bibliothèques `import numpy as np` et `import numpy.random as rd`.

On rappelle que `rd.randint(3)` renvoie au hasard un entier de $\{0, 1, 2\}$.

Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
def edhec2005() :
    x=0
    for k in range(1,n+1):
        u=rd.randint(3)
        if u==2 :
            x= .....
        else:
            x=...
    return(x)
```

5. (a) Montrer que : $\forall n \geq 2, \sum_{k=1}^{n-1} k p^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - n p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$
(b) En déduire que $E(X) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$.
6. (a) Montrer, en utilisant la question 3a), que : $\forall n \in \mathbb{N}, E(X_{n+1}^2) = p(E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1)$.
(b) Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = E(X_n^2) + (2n-1) \frac{p^{n+1}}{1-p}$
Montrer que $u_{n+1} = p u_n + \frac{p(1+p)}{1-p}$
(c) En déduire l'expression de u_n , puis celle de $E(X_n^2)$ en fonction de p et n .
(d) Montrer enfin que : $V(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2} (1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1})$