

Correction du sujet n°1

Option Économique

MATHÉMATIQUES

7 Septembre 2026

Exercice n°1

1. (a) La fonction f est définie pour tout x tel que $x + 2 \neq 0$. Ainsi, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
- (b) Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $f(x) = 3$. On a alors

$$\frac{3x - 1}{x + 2} = 3$$

ce qui implique que $3x - 1 = 3(x + 2) = 3x + 6$ ce qui donne finalement $-1 = 6$ ce qui est absurde.

Conclusion : pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \neq 3$.

- (c) Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f'(x) = \frac{3(x + 2) - (3x - 1)}{(x + 2)^2} = \frac{7}{(x + 2)^2} \geq 0$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
f			

- (d) Soit $x \in \mathcal{D}_f$. On a :

$$\begin{aligned}
 f(x) \leq 1 &\iff \frac{3x - 1}{x + 2} \leq 1 \\
 &\iff \frac{3x - 1}{x + 2} - 1 \leq 0 \\
 &\iff \frac{3x - 1 - (x + 2)}{x + 2} \leq 0 \\
 &\iff \frac{2x - 3}{x + 2} \leq 0
 \end{aligned}$$

On dresse alors le tableau de signe de cette expression :

x	$-\infty$	-2	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x - 3$	-	-	0	+
$x + 2$	-	0	+	+
$\frac{2x - 3}{x + 2}$	+	-	0	+

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left] -2, \frac{3}{2} \right]$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f \circ g(x) \text{ existe} &\iff \begin{cases} x \in \mathcal{D}_g \\ g(x) \in \mathcal{D}_f \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \\ \ln(x) \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \\ \ln(x) \neq -2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \\ x \neq e^{-2} \end{cases} \\ &\iff x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{e^{-2}\} \end{aligned}$$

Ainsi $D_{f \circ g} = \mathbb{R}_+^* \setminus \{e^{-2}\}$.

Pour tout $x \in D_{f \circ g}$, on a :

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\ln(x)) = \frac{3 \ln(x) - 1}{\ln(x) + 2}$$

Conclusion : pour tout $x \in D_{f \circ g}$, $f \circ g(x) = \frac{3 \ln(x) - 1}{\ln(x) + 2}$.

(b) Soit $x \in \mathcal{D}_{f \circ g}$. On a :

$$\begin{aligned} f \circ g(x) = 2 &\iff \frac{3 \ln(x) - 1}{\ln(x) + 2} = 2 \\ &\iff 3 \ln(x) - 1 = 2(\ln(x) + 2) \\ &\iff 3 \ln(x) - 1 = 2 \ln(x) + 4 \\ &\iff \ln(x) = 5 \\ &\iff x = e^5 \end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \{e^5\}$.

Exercice n°2

On considère la fonction $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$.

1. On résout $e^x + e^{-x} > 0$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$.

Donc le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$.

2. Le domaine de définition de f est symétrique. Pour tout x réel,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(e^{-x} + e^{-(-x)}) \\ &= \ln(e^x + e^{-x}) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

La fonction f est paire.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Or $e^x + e^{-x} > 0$, on s'intéresse alors au numérateur. On résout

$$\begin{aligned}
 e^x - e^{-x} \geq 0 &\iff e^x \geq e^{-x} \\
 &\iff e^{2x} \geq 1 \\
 &\iff 2x \geq 0 \\
 &\iff \boxed{x \geq 0}
 \end{aligned}$$

Enfin, $f(0) = \ln(e^0 + e^{-0}) = \ln(2)$. On en déduit le tableau de variation suivant

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Variations de f	$+\infty$	$\searrow \quad \nearrow$ $\ln(2)$	$+\infty$

4. On calcule pour x réel,

$$\begin{aligned}
 f(x) - x &= \ln(e^x + e^{-x}) - x \\
 &= \ln(e^x(1 + e^{-2x})) - x \\
 &= \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-2x}) - x \\
 &= x + \ln(1 + e^{-2x}) - x \\
 &= \boxed{\ln(1 + e^{-2x})}
 \end{aligned}$$

5. Il est clair que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + e^{-2x} > 1$, et par croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, cela donne : $\ln(1 + e^{-2x}) > 0$.

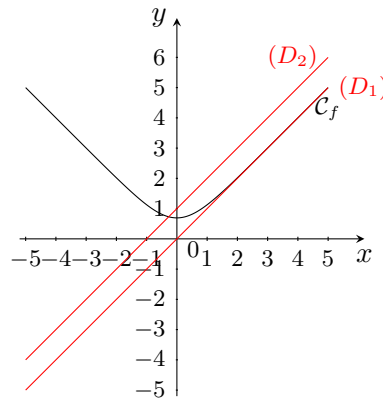
Par conséquent $f(x) - x > 0$ et donc $\boxed{f(x) > x}$.

6. On résout

$$\begin{aligned}
 f(x) < x + 1 &\iff \ln(e^x + e^{-x}) < x + 1 \\
 &\iff e^x + e^{-x} < e^{x+1} \quad \text{par croissance de exp} \\
 &\iff e^x - e \times e^x + e^{-x} < 0 \\
 &\iff (1 - e)e^x + e^{-x} < 0 \\
 &\iff (1 - e)e^{2x} + 1 < 0 \quad \text{en multipliant par } e^x \\
 &\iff -(e - 1)e^{2x} < -1 \\
 &\iff e^{2x} > \frac{1}{e - 1} \\
 &\iff 2x > \ln\left(\frac{1}{e - 1}\right) \\
 &\iff x > \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{e - 1}\right)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est donc } \mathcal{S} = \left] \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{e - 1}\right); +\infty \right[.}$$

7. Tracer sur un même graphique les courbes représentatives de f , $y = x$ et $y = x + 1$.



8. Il suffit de taper :

```
import numpy as np
def f(x):
    y=np.log(np.exp(x)+np.exp(-x));
    return(y)
x=np.linspace(-5,5,1000)
y=f(x)
plot(x,y)
```

Exercice n°3

1. (a) L'environnement def permet de signaler à Python que l'on va définir une nouvelle fonction. La fonction définie ici est la fonction f définie par $f(x) = |2x - 4| + 3$.

La commande `float(input)` permet de demander à l'utilisateur une valeur réelle pour la variable a . La commande `print` permet d'afficher une variable. Ici le programme demande d'afficher, pour a donné, $f(a)$.

- (b) On résout l'équation $f(x) = 6$, définie sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = 6 \Leftrightarrow |2x - 4| + 3 = 6 \Leftrightarrow |2x - 4| = 3 \Leftrightarrow 2x - 4 = 3 \text{ ou } 2x - 4 = -3 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

Pour que Python renvoie la valeur 6, Il faut donner la valeur $\frac{7}{2}$ ou $\frac{1}{2}$ à a .

2. (a) Ce programme définit tout d'abord la fonction g , définie par $g(x) = \sqrt{2x - 4}$. Puis il attribue à la variable x l'image de 3, et à la variable y l'image de 4. Ensuite le programme teste si x est strictement supérieur à y , et si $x^2 + 2$ est égal à y^2 .
- (b) La variable x contient $g(3) = \sqrt{2}$ et y contient $g(4) = \sqrt{4} = 2$. La première ligne renverra **False**, car x n'est pas strictement supérieur à y , et la deuxième renverra **True** car $x^2 + 2 = 2 + 2 = 4 = 2^2 = y^2$.

Exercice n°4

1. Soient a et b deux réels et k un entier supérieur à 3.

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k-2} = \frac{a(k-2) + bk}{k(k-2)} = \frac{(a+b)k - 2a}{k^2 - 2k}$$

Alors

$$\frac{-8}{k^2 + 2k} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-2} \Leftrightarrow \frac{-8}{k^2 + 2k} = \frac{(a+b)k - 2a}{k^2 - 2k} \Leftrightarrow -8 = (a+b)k - 2a$$

Or deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont même degré et mêmes coefficients. On obtient alors le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -2a = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -4 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout entier $k \geq 1$, $\boxed{\frac{-8}{k^2 - 2k} = \frac{4}{k} - \frac{4}{k - 2}}.$

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

$$\sum_{k=3}^n \frac{-8}{k^2 - 2k} = \sum_{k=3}^n \frac{4}{k} - \frac{4}{k - 2} = 4 \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - 4 \sum_{k=3}^n \frac{1}{k - 2}$$

On effectue un changement d'indice dans la seconde somme. On pose $i = k - 2$. Ainsi si $k = 3$, $i = 1$, et si $k = n$, $i = n - 2$. Ainsi

$$\sum_{k=3}^n \frac{-4}{k^2 - 2k} = 4 \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - 4 \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{i} = \frac{4}{n} + \frac{4}{n-1} - \frac{4}{1} - \frac{4}{2} = \boxed{\frac{4}{n} + \frac{4}{n-1} - 6}$$

Exercice n°5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

1.

$$P_n(0) = \prod_{k=1}^n 1 + \frac{0}{k} \prod_{k=1}^n 1 = 1$$

$$P_n(1) = \prod_{k=1}^n 1 + \frac{1}{k} = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = \frac{\prod_{k=1}^n k+1}{\prod_{k=1}^n k}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\prod_{i=2}^{n+1} i}{\prod_{k=1}^n k} \text{ On a effectué le changement d'indice } i = k + 1 \text{ au numérateur} \\ &= \frac{n+1}{1} = n+1 \text{ par télescopage} \end{aligned}$$

$$P_n(-n) = \prod_{k=1}^n 1 + \frac{-n}{k} = \prod_{k=1}^n \frac{k-n}{k} = \frac{\prod_{k=1}^n k-n}{\prod_{k=1}^n k} = 0$$

car le terme en $k = n$ dans le produit au numérateur est $n - n = 0$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Montrons que $xP_n(x) = (x+n)P_n(x-1)$. On a d'une part

$$xP_n(x) = x \times \prod_{k=1}^n 1 + \frac{x}{k} = x \times \prod_{k=1}^n \frac{x+k}{k} = x \times \frac{\prod_{k=1}^n x+k}{\prod_{k=1}^n k} = \frac{\prod_{k=0}^n x+k}{\prod_{k=1}^n k}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
 (x+n)P_n(x-1) &= \left(\frac{x+n}{x}\right) \prod_{k=1}^n 1 + \frac{x-1}{k} = (x+n) \prod_{k=1}^n \frac{x+k-1}{k} = (x+n) \frac{\prod_{k=1}^n (x+k-1)}{\prod_{k=1}^n k} \\
 &= (x+n) \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (x+i)}{\prod_{k=1}^n k} \quad \text{On a effectué le changement d'indice } i = k-1 \text{ au numérateur} \\
 &= \frac{\prod_{i=0}^n (x+i)}{\prod_{k=1}^n k}
 \end{aligned}$$

On en déduit que $xP_n(x) = (x+n)P_n(x-1)$ et en divisant par x non nul : $P_n(x) = \frac{x+n}{x}P_n(x-1)$.

3. Initialisation :

Pour $p = 1$, on sait d'après la question 1 que $P_n(1) = n + 1$. D'autre part

$$\frac{(n+p)!}{p!n!} = \frac{(n+1)!}{1!n!} = \frac{(n+1)n!}{n!} = n+1$$

Hérédité

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $P_n(p) = \frac{(n+p)!}{p!n!}$. Montrons qu'alors $P_{n+1}(p+1) = \frac{(n+p+1)!}{(p+1)!n!}$.

$$\begin{aligned}
 P_n(p+1) &= \left(\frac{p+1+n}{p+1}\right) P_n(p) \\
 &= \left(\frac{p+1+n}{p+1}\right) \frac{(n+p)!}{p!n!} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
 &= \frac{(n+p+1)!}{(p+1)!n!} \quad \text{car } (n+p+1)(n+p)! = (n+p+1)! \text{ et } (p+1)p! = (p+1)!
 \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : On a montré que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $P_n(p) = \frac{(n+p)!}{p!n!}$.

Problème

Etude de cas particuliers

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $S_n(1) = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. On raisonne par récurrence

Initialisation :

Pour $n = 1$, on a $S_1(2) = \sum_{k=1}^1 k2^k = 1 \times 2^1 = 2$. D'autre part, $2 + (n-1)2^{n+1} = 2 + 0 \times 2^2 = 2$.

La propriété est donc vraie au rang $n = 1$.

Hérédité :

Soit $n \geq 1$. On suppose que $\sum_{k=1}^n k2^k = 2 + (n-1)2^{n+1}$. Montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} k2^k = 2 + n2^{n+2}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k2^k &= \sum_{k=1}^n k2^k + (n+1)2^{n+1} \\ &= 2 + (n-1)2^{n+1} + (n+1)2^{n+1} \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 2 + 2^{n+1}(n-1+n+1) = 2 + 2^{n+1} \times 2n \\ &= 2 + n2^{n+2}\end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion :

On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k2^k = 2 + (n-1)2^{n+1}$.

3. On raisonne une nouvelle fois par récurrence :

Initialisation :

Pour $n = 1$, on a $S_1\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^1 k \times \frac{1}{2^k} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

D'autre part, $2 - \frac{n+2}{2^n} = 2 - \frac{1+2}{2^1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$.

La propriété est donc vraie au rang $n = 1$.

Hérédité :

Soit $n \geq 1$. On suppose que $\sum_{k=1}^n k \times \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$. Montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} k \times \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k \times \frac{1}{2^k} &= \sum_{k=1}^n k \times \frac{1}{2^k} + (n+1) \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= 2 - \frac{n+2}{2^n} + (n+1) \frac{1}{2^{n+1}} \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 2 - \frac{1}{2^n} \left((n+2) - \frac{(n+1)}{2} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{2^n} \left(\frac{2n+4-n-1}{2} \right) = 2 - \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+3}{2} \right) \\ &= 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion :

On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k \times \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

Etude du cas général.

- (a) Soit n et p entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$. En effectuant le changement d'indice $i = k + p$, on obtient :

$$x^p \sum_{k=0}^{n-p} x^k = \sum_{k=0}^{n-p} x^{k+p} = \sum_{k=p}^n x^k$$

- (b) Soit $n \geq 1$. En effectuant le changement d'indice $i = k + 1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n kx^{k+1} = \sum_{i=2}^{n+1} (i-1)x^i = \sum_{i=2}^{n+1} ix^i - \sum_{i=2}^{n+1} x^i$$

2.

$$(1-x)S_n(x) = (1-x) \sum_{k=1}^n kx^k = \sum_{k=1}^n kx^k - x \sum_{k=1}^n kx^k = \sum_{k=1}^n kx^k - \sum_{k=1}^n kx^{k+1}$$

D'après la question 1(b) $\sum_{k=1}^n kx^{k+1} = \sum_{i=2}^{n+1} ix^i - \sum_{i=2}^{n+1} x^i$, donc en remplaçant cela donne :

$$(1-x)S_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^k - \sum_{i=2}^{n+1} ix^i + \sum_{i=2}^{n+1} x^i$$

D'après la question 1(a), $\sum_{i=2}^{n+1} x^i = x^2 \times \sum_{i=0}^{n-1} x^i = x^2 \times \frac{1-x^n}{1-x}$, ainsi en remplaçant et en effectuant un

télescopage, on obtient :
$$(1-x)S_n(x) = x - (n+1)x^{n+1} + x^2 \times \frac{1-x^n}{1-x}$$

- Comme ici $x \neq 1$ on peut diviser l'expression précédente par $1-x$:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{x - (n+1)x^{n+1} + x^2 \times \frac{1-x^n}{1-x}}{1-x} = \frac{x - (n+1)x^{n+1}}{1-x} + x^2 \times \frac{1-x^n}{(1-x)^2} \\ &= \frac{x(1-x) - (n+1)x^{n+1}(1-x) + x^2 \times (1-x^n)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{x - x^2 - (n+1)x^{n+1} + (n+1)x^{n+2} + x^2 - x^{n+2}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Une autre façon de trouver S_n .

- Soit $x \neq 1$. Alors $T_n(x) = x \times \frac{1-x^n}{1-x}$.

- Pour tout $x \neq 1$,

$$\begin{aligned} T'_n(x) &= 1 \times \frac{1-x^n}{1-x} + x \times \left(\frac{-nx^{n-1}(1-x) - (1-x^n)(-1)}{(1-x)^2} \right) \\ &= \frac{(1-x)(1-x^n) - nx^n(1-x) - x(1-x^n)(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1 - x^n - x + x^{n+1} - nx^n + nx^{n+1} + x - x^{n+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

3. Soit $x \neq 1$. L'écriture en extension de $T_n(x)$ donne :

$$T_n(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$$

Si on dérive cette expression, on obtient :

$$T'_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$$

donc

$$xT'_n(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n = \sum_{k=1}^n kx^k = S_n(x)$$

4. En utilisant les deux questions précédentes, on établit que

$$S_n(x) = xT'_n(x) = x \left(\frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1+x)^2} \right) = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1+x)^2}$$

et on retrouve bien l'expression de la partie précédente.